センター試験 (2010 年実施) 数学 I 解説

2010 年 1 月 20 日作成
2010 年 1 月 23 日修正

第 1 問

〔1〕 $\alpha = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ を有理化する。

分母・分子に $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ を掛けると、

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}\\ &= \frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}\\ &= \frac{10-2\sqrt{21}}{4}\\ &= \frac{5-\sqrt{21}}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)\end{aligned}$$

2 次方程式 $6x^2-7x+1=0$ の解について、

$$6x^2-7x+1=(6x-1)(x-1)$$

だから、

$$x=\frac{1}{6},\ 1 \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$$

すると、

⓪ $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\dfrac{15-3\sqrt{21}}{6}=\dfrac{15-\sqrt{189}}{6}>\dfrac{15-\sqrt{196}}{6}=\dfrac{1}{6}$

① $\dfrac{2}{5-\sqrt{21}}>\dfrac{2}{5-\sqrt{16}}=2$

② $\dfrac{1}{6}$

③ 1

したがって、 ⓪〜 ③の数のうち最も小さいものは ② $\qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ク}}\right)$

〔2〕 n を整数とし、x の連立不等式

$$\begin{cases} 6x^2-11nx+3n^2 \leq 0 & \cdots(1.1) \\ |3x-2n| \geq 2 & \cdots(1.2) \end{cases}$$

を考える。

式 (1.1) の左辺を因数分解すると、

$$6x^2-11nx+3n^2=(3x-n)(2x-3n)\cdots(1.3) \qquad \cdots(答)\Big(\big(\boxed{\text{ケ}}x-n\big)\big(\boxed{\text{コ}}x-\boxed{\text{サ}}n\big)\Big)$$

$x=1$ が式 (1.1) を満たすとき、式 (1.3) より、

$$(3-n)(2-3n) \leq 0$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq n \leq 3$$

ところが、n は整数だから、

$$1 \leq n \leq 3 \qquad \cdots(答)\Big(\boxed{\text{シ}} \leq n \leq \boxed{\text{ス}}\Big)$$

次に、$x=1$ が式 (1.2) を満たすとき、

$$|3-2n| \geq 2$$

$\therefore 3-2n \leq -2$ または $3-2n \geq 2$

$\therefore \dfrac{5}{2} \leq n$ または $n \leq \dfrac{1}{2}$

ところが、n は整数だから、

$$n \leq 0,\ 3 \leq n \qquad \cdots(答)\Big(n \leq \boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}} \leq n\Big)$$

よって、$x=1$ が上の連立不等式を満たすとき、$n=3$ である。　　$\cdots$(答)$\Big(n=\boxed{\text{タ}}\Big)$

そこで、$n=3$ のとき、

$$\begin{cases} (3x-3)(2x-9) \leq 0 \\ |3x-6| \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 \leq x \leq \dfrac{9}{2} \\ 3x-6 \leq -2 \text{ または } 3x-6 \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 \leq x \leq \dfrac{9}{2} \\ x \leq \dfrac{4}{3} \text{ または } \dfrac{8}{3} \leq x \end{cases}$$

$$\therefore 1 \leq x \leq \frac{4}{3},\ \frac{8}{3} \leq x \leq \frac{9}{2} \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right) \quad \left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$$

第 2 問

まず、グラフ G_2 の式を変形 (平方完成) する。

$$y = x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - a^2 + b$$

つまり、G_2 の頂点は、$(-a, -a^2+b)$

この点が G_1 の上にあるのだから、グラフ G_1 の式に代入して、

$$-a^2 + b = 3a^2 + 2a - 1 \qquad (x = -a, y = b \text{ を代入するとき符号に注意})$$

$$\therefore b = 4a^2 + 2a - 1 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ア}}a^2 + \boxed{\text{イ}}a - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

だから、この関係式を代入すれば、G_2 の頂点は

$$(-a, 3a^2 + 2a - 1) \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{エ}}a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

(1) 問題を見ると、頂点の y 座標の最小値を求めているから、G_2 の頂点の y 座標を平方完成してあげると、

$$3a^2 + 2a - 1 = 3\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

したがって、$a = \dfrac{-1}{3}$ のとき、最小値 $\dfrac{-4}{3}$ $\qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$

$a = \dfrac{-1}{3}$ のとき、G_2 の頂点は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$ となるから、G_2 の軸は $x = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$

このとき、G_2 のグラフは、頂点が $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$ なのだから、

$$y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

ここで、x 軸との交点を出すのだから、$y = 0$ を代入すれば、

$$0 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

(2) G_2 が点 $(0, 5)$ を通るので、$x = 0, y = 5$ を代入すると、$5 = b$

したがって、最初の a と b の関係式 $b = 4a^2 + 2a - 1$ に代入すると、

$$5 = 4a^2 + 2a - 1$$

$$4a^2 + 2a - 6 = 0$$

$$2a^2 + a - 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = 1, \frac{-3}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ツ}}, \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

ここで、$a = 1$ のとき、G_2 の頂点は $(-1, 4)$ である。

G_2 の頂点を $t \neq 0$ 動かしたとすると、頂点を動かした後の座標は $(t-1, t+4)$ と表せるから、これを G_1 の式に代入すると、

$$t + 4 = 3(t-1)^2 - 2(t-1) - 1$$

$$3t^2 - 9t = 0$$

$$\therefore t = 0,\ 3$$

$t \neq 0$ だから、$t = 3$ つまり x 方向、y 方向に 3 ずつ移動させればよい。$\cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ニ}}\right)$

第 3 問

$\triangle$ABC において、$\mathrm{AB}=\sqrt{5}, \mathrm{BC}=\sqrt{13}, \mathrm{CA}=\sqrt{10}$ だから、余弦定理より、

$$13 = 5 + 10 - 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$\therefore \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イウ}}}\right)$$

$$\therefore \sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}\right)$$

また、$\triangle$ABC の面積は、

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{7}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

(1) 円 O を $\triangle$ABC の外接円とする。円 O の点 A を含まない弧 BC($\neq \overset{\frown}{\mathrm{BAC}}$) 上に点 S を $\angle\mathrm{BAS}=45^\circ$ となるようにとる。また、円 O の点 B を含まない弧 AC($\neq \overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$) 上に点 T を $\angle\mathrm{BCT}=45^\circ$ となるようにとる。

すると、円周角の性質から、$\angle\mathrm{BCS}=\angle\mathrm{BAS}=45^\circ$ だから、

$$\angle\mathrm{SCT} = \angle\mathrm{SCB}+\angle\mathrm{BCT} = 45^\circ+45^\circ = 90^\circ \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{コサ}}^\circ\right)$$

よって、ST は直径になる。

一方で、$\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}, BC=\sqrt{13}$ だから、正弦定理より、

$$\text{円 O の半径} = \frac{\sqrt{13}}{2\times\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{26}}{7}$$

$$\therefore \mathrm{ST} = \frac{5\sqrt{26}}{7} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

また、円周角の性質から、$\angle\mathrm{BST}=\angle\mathrm{BCT}=90^\circ$ なので、BT も直径であって、

$$\mathrm{BT} = \frac{5\sqrt{26}}{7} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

(2) $\angle$ABC を底面とし、P を頂点とする三角錐(すい)PABC を考える。

3 辺 PA, PB, PC が互いに直交しているとき、

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=5,\quad \mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=13,\quad \mathrm{PC}^2+\mathrm{PA}^2=10$$

$$\therefore \mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=14$$

$$\therefore \mathrm{PA}^2=1,\quad \mathrm{PB}^2=4,\quad \mathrm{PC}^2=9$$

$$\therefore \mathrm{PA}=1,\quad \mathrm{PB}=2,\quad \mathrm{PC}=3 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ト}},\boxed{\text{ナ}},\boxed{\text{ニ}}\right)$$

また、点 P から $\triangle$ABC に下ろした垂線の長さを h とすると、これは、底面を $\triangle$ABC とする三角錐 PABC の高さである。

一方で、PA, PB, PC は互いに垂直だから、

$$\text{三角錐の体積} = \mathrm{PA}\times\mathrm{PB}\times\frac{1}{2}\times\mathrm{PC}\times\frac{1}{3} = 1$$

すると、$\triangle$ABC の面積が $\dfrac{7}{2}$ であったから、

$$\frac{7}{2}\times h\times\frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore h = \frac{6}{7} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\right)$$

第 4 問

m, n を自然数とし、$1 < m < n$ とする。

$$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}, \quad \beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

とおく。さらに、

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

とおく。すると、

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}, \quad \frac{1}{\beta} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

であり、

$$S = \alpha\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$$

である。

(1) $m = 3, n = 6$ のとき、

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{m} = 2\sqrt{3} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$$

$$\beta + \frac{1}{\beta} = 2\sqrt{n} = 2\sqrt{6} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)$$

$$\therefore S = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

(2) $S = 8\sqrt{3}$ ならば、$2\sqrt{m} \times 2\sqrt{n} = 8\sqrt{3}$

$$\therefore mn = 12 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{クケ}}\right)$$

このとき、m, n が自然数であることと、$1 < m < n$ であることに注意すると、

$$m = 2, \quad n = 6 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{コ}}, \ \boxed{\text{サ}}\right)$$

または

$$m = 3, \quad n = 4 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{シ}}, \ \boxed{\text{ス}}\right)$$

(3) 等式の左辺について、

$$\begin{aligned}
&\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} \\
&= \alpha^2\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) \\
&= \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) \\
&= \left\{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\right\}\left\{\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 2\right\} \\
&= \left\{(2\sqrt{m})^2 - 2\right\}\left\{(2\sqrt{n})^2 - 2\right\} \\
&= (4m-2)(4n-2) \\
&= 4(2m-1)(2n-1)
\end{aligned}$$

したがって、

$$(2m-1)(2n-1) = 125$$

$m < n$ だから、$2m-1 < 2n-1$ であって、$2m-1, 2n-1$ は自然数であるから、

$$2m-1 = 5, \quad 2n-1 = 25$$

$$m = 2, \quad n = 13 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{セ}}, \ \boxed{\text{ソタ}}\right)$$