2010 年実施センター試験 数学 II 解説

2010 年 1 月 21 日作成
2010 年 1 月 24 日修正

第 1 問

〔1〕 連立方程式

$$\begin{cases} xy = 128 & \cdots (1.1) \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots (1.2) \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y を求める。
ただし、$x \neq 1, y \neq 1$ である。

公式 $\log xy = \log x + \log y$

より、式 (1.1) から、

$$\log_2 x + \log_2 y = 7 \cdots (1.3) \qquad \cdots (\text{答})\left(\boxed{\text{ア}}\right)$$

一方、式 (1.2) について、左辺を変形すると、

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{(\log_2 x)(\log_2 y)}$$

したがって、式 (1.3) を分子に代入してあげれば、

$$\frac{7}{(\log_2 x)(\log_2 y)} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore (\log_2 x)(\log_2 y) = 12 \cdots (1.4) \qquad \cdots (\text{答})\left(\boxed{\text{イウ}}\right)$$

すると、式 (1.3) と式 (1.4) から、解が $\log_2 x, \log_2 y$ である 2 次方程式を考えることができる。
t を変数とすると、この 2 次方程式は解と係数の公式より、

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \cdots (1.5) \qquad \cdots (\text{答})\left(\boxed{\text{エ}}, \ \boxed{\text{オカ}}\right)$$

となる。
式 (1.5) は、

$$(t-3)(t-4) = 0$$

となるから、(1.5) の解は $t = 3, 4 \qquad \cdots (\text{答})\left(\boxed{\text{キ}}, \ \boxed{\text{ク}}\right)$
$t = 3$ のとき、

$$\log_2 x = 3, \log_2 y = 4$$

$$\therefore x = 8, y = 16 \qquad \cdots (\text{答})\left(\boxed{\text{ケ}}, \ \boxed{\text{コサ}}\right)$$

また、$t = 4$ のとき、上の x と y が入れ替わって、

$$\log_2 x = 4, \log_2 y = 3$$

$$\therefore x = 16, y = 8$$

となる。

〔2〕 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して、

$\quad\sin 4\theta=\cos\theta\cdots(1.6)\qquad\cdots(答)\left(\boxed{\text{シ}}\right)$

ここで、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$(\because)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=\cos\theta$

したがって、

$\quad\sin 4\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることと、$\sin X=\sin(\pi-X)$ に注意すれば、

$\quad\therefore 4\theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\quad\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$ または $\theta=\dfrac{\pi}{10}\qquad\cdots(答)\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}},\quad\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}\right)$

ゆえに、$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。$\qquad\cdots(答)\left(\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$

一方で、式 (1.6) の左辺に 2 倍角の公式を適用すると、

$\quad 2\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta\qquad\cdots(答)\left(\boxed{\text{ツ}}\right)$

さらに 2 倍角の公式を左辺に適用すれば、

$\quad 2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)\left(1-2\sin^2\theta\right)=\cos\theta$

$\quad\therefore\left(4\sin\theta-8\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta\qquad\cdots(答)\left(\boxed{\text{テ}},\quad\boxed{\text{ト}}\right)$

ここで、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$\cos\theta>0$ だから、

$\quad 8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0\cdots(1.7)$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ は式 (1.7) を満たすから、左辺を $2\sin\theta-1$(この解は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ である) で割ってあげると、

$\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0\qquad\cdots(答)\left(\boxed{\text{ナ}},\quad\boxed{\text{ニ}}\right)$

$\quad\therefore\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

ここで、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から、$\sin\theta>0$ なので、

$\quad\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\qquad\cdots(答)\left(\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}\right)$

第 2 問

k を実数とし、座標平面上に点 $P(1,0)$ をとる。

曲線 C を

$$y=-x^3+9x^2+kx=-x(x^2-9x-k)$$

とする。

(1) 点 $Q(t,-t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線を l とおくと、$y'=-3x^2+18x+k$ より接線 l は、

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

また、この接線が点 P を通るから、

$$0-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(1-t)$$

$$\therefore t^3-9t^2-kt=-3t^2+18t+k+3t^3-18t^2-kt$$

$$\therefore -2t^3+12t^2-18t=k \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$$

ここで、

$$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$$

とおくと、

$$p'(t)=-6t^2+24t-18$$

だから、

$$-6t^2+24t-18=0$$

を解くと、

$$t=1,3$$

ポイント

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して、

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ の解を $x=\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ とすると、

$a>0$ ならば、$x=\alpha$ で極小値 $f(\alpha)$、$x=\beta$ で極大値 $f(\beta)$ をとる。

$a>0$ ならば、$x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$、$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとる。

したがって、$t=1$ で極小値 $f(1)=-8$ をとり、$t=3$ で極大値 $f(3)=0$ をとる。

$$\cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$$

実際に増減表を書けば、

t		1		3	
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$

となる。

$y=k$ と $y=p(t)$ との交点の数は、点 P を通る曲線 C の接線の本数だから、

$$\begin{cases} k<-8 \text{ のとき 1 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{タ}}\right) \\ k=-8 \text{ のとき 2 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{シス}}\right) \\ -8<k<0 \text{ のとき 3 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ソ}}\right) \\ k=0 \text{ のとき 2 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{サ}}\right) \\ 0<k \text{ のとき 1 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{セ}}\right) \end{cases}$$

となる。

(2) $k=0$ とすると、曲線 C は、

$y=-x^3+9x^2=-x^2(x-9)\cdots(2.1)$

一方で、曲線 D を、

$y=-x^3+6x^2+7x=-x(3x^2-6x-7)\cdots(2.2)$

とする。

式 (2.1) に式 (2.2) を代入すると、

$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$

$\therefore 3x^2-7x=0$

$\therefore x=0,\ \dfrac{7}{3}\qquad\cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{チ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)$

$-1\leq x\leq 2$ において、$-1\leq x\leq 0$ では曲線 C が上で曲線 D は下に、$0\leq 2$ においては曲線 D が上で曲線 C が下にある。

したがって、曲線 C と曲線 D および 2 直線 $x=-1, x=2$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は、

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}dx\\
&=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)dx\\
&=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2}\\
&=\left(1+\frac{7}{2}\right)+(-8+14)\\
&=\frac{21}{2}\qquad\cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\right)
\end{aligned}\tag{1}$$

第 3 問

座標平面上において、直線 $l : y = -x$ がある。2 点 $\mathrm{A}(2, 0), \mathrm{B}(2, 2)$ および、直線 l 上の点 $\mathrm{P}(s, -s)$ を考える。ただし、$s \neq 2$ である。

3 点 A, B, P を通る円 C について、その中心を Q とすると、点 Q は点 A と点 B との垂直二等分線上にある。

点 A と点 B の垂直二等分線は $y = 1$ であることがわかる。

したがって、点 Q は $y = 1$ 上にある。　$\cdots$ (答) $\left(\boxed{\text{ア}}\right)$

そこで、t を用いて点 Q の座標を $(t, 1)$ とおくと、

$$\mathrm{AQ}^2 = (2 - t)^2 + 1^2 = t^2 - 4t + 5 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{イ}}, \ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

$$\mathrm{PQ}^2 = (s - t)^2 + (-s - 1)^2 = t^2 - 2st + 2s^2 + 2s + 1 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}\right)$$

となる。

一方、$s \neq t$ のとき、直線 PQ の傾きは、

$$\frac{1 + s}{t - s} \quad \cdots (答) \left(\frac{\boxed{\text{ク}} + s}{t - s}\right)$$

となる。

円 C が直線 l と接するとき、s の値と円 C の方程式を求める。円 C と直線 l が接するとき、直線 PQ と直線 l は垂直であるから、(なぜなら、PQ は円 C の半径だから)

$$\frac{1 + s}{t - s} \times (-1) = -1$$

$$\therefore \frac{1 + s}{t - s} = 1 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{ケ}}\right)$$

$$\therefore 1 + s = t - s$$

$$\therefore t = 2s + 1 \cdots (3.1) \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{コ}}, \ \boxed{\text{サ}}\right)$$

となる。さらに、(点 Q は円 C の中心だから)$\mathrm{AQ}^2 = \mathrm{PQ}^2$ であることより、

$$t^2 - 4t + 5 = t^2 - 2st + 2s^2 + 2s + 1$$

$$\therefore 2s^2 - 2st + 2s + 4t - 4 = 0$$

式 (3.1) を代入して、

$$2s^2 - 4s^2 - 2s + 2s + 8s + 4 - 4 = 0$$

$$-2s^2 + 8s = 0$$

$$\therefore s = 0, 4 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{シ}}, \ \boxed{\text{ス}}\right)$$

$s = 0$ のとき、$t = 1$ で $\mathrm{AQ}^2 = 2 = 1^2 + 1^2$、

したがって、点 $\mathrm{P}(0, 0)$、点 $\mathrm{Q}(1, 1)$ となるから、円 C の方程式は、

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{セ}}, \ \boxed{\text{ソ}}, \ \boxed{\text{タ}}\right)$$

一方で、$s = 4$ のとき、$t = 9$ で $\mathrm{AQ}^2 = 50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$、

したがって、点 $\mathrm{P}(4, -4)$、点 $\mathrm{Q}(9, 1)$ となるから、円 C の方程式は、

$$(x - 9)^2 + (x - 1)^2 = 50 \quad \cdots (答) \left(\boxed{\text{チ}}, \ \boxed{\text{ツ}}, \ \boxed{\text{テト}}\right)$$

である。

第 4 問

a, b を実数とし、x の 3 次式

$$P(x) = x^4 - ax^2 - bx - 1 + a + b$$

$$Q(x) = x^3 - 2bx^2 - 4(1-a-b)x - 8a$$

を考える。

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ を a, b について整理すると、

$$P(x) = -(x^2-1)a - (x-1)b + x^2 - 1 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{ア}},\quad \boxed{\textbf{イ}}\right)$$

$$= (x-1)\{-(x+1)a - b + (x^2+x+1)\}$$

$$= (x-1)\{x^2 + (1-a)x + 1 - a - b\} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{オ}},\quad \boxed{\textbf{カ}}\right)$$

$$Q(x) = 4(x-2)a - 2(x^2-2x)b + x^3 - 4x \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{ウ}},\quad \boxed{\textbf{エ}}\right)$$

$$= (x-2)\{4a - 2xb + x(x+2)\}$$

$$= (x-2)\{x^2 + 2(1-b)x + 4a\} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{キ}},\quad \boxed{\textbf{ク}},\quad \boxed{\textbf{ケコ}}\right)$$

と因数分解される。

(2) 虚数 α が $P(\alpha) = 0$ を満たすとき、

$$\alpha^2 + (1-a)\alpha + 1 - a - b \qquad \cdots(4.1)$$

$$\alpha^2 + 2(1-b)\alpha + 4a \qquad \cdots(4.2)$$

であるので、(4.1) から (4.2) を引くと、α は

$$(-1-a+2b)\alpha + 1 - 5a - b = 0 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{サシ}},\quad \boxed{\textbf{スセ}}\right)$$

を満たす。ここで、a, b が実数であり、かつ α が虚数であることから、

$$-1 - a + 2b = 0 \text{ かつ } 1 - 5a - b = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{11},\quad b = \frac{6}{11} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\textbf{ソ}}}{\boxed{\textbf{タチ}}},\quad \frac{\boxed{\textbf{ツ}}}{\boxed{\textbf{タチ}}}\right)$$

このとき、方程式 $P(x) = 0$ の二つの虚数解を β, γ とすると、

$$\beta + \gamma = -(1-a) = -\frac{10}{11},\quad \beta\gamma = 1 - a - b = \frac{4}{11}$$

となるから、

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} = \frac{-\frac{10}{11}}{\frac{4}{11}} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\frac{4}{11}} = \frac{11}{4}$$

ゆえに、$P(x) = 0$ の二つの虚数解の逆数は、2 次方程式

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0 \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\textbf{テ}}}{\boxed{\textbf{ト}}},\quad \frac{\boxed{\textbf{ナニ}}}{\boxed{\textbf{ヌ}}}\right)$$

の解である。