センター試験 (2011 年実施) 数学 I 解説

2011 年 1 月 16 日作成
2011 年 1 月 27 日修正

第 1 問

〔1〕 $a = 3 + 2\sqrt{2},\ b = 2 + \sqrt{3}$ とすると、

$$|a|^2 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$$
$$|b|^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

なので、

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1} = 3 - 2\sqrt{2} \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}})$$
$$\frac{1}{b} = \frac{\bar{b}}{|b|^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{オ}})$$

そこで、それぞれ普通に計算すると、

$$\frac{a}{b} = (3 + 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{3}) = 6 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$
$$\frac{b}{a} = (2 + \sqrt{3})(3 - 2\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

よって、

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}})$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 12 - 4\sqrt{6}$$

ここでポイントなのは、下の式を予め計算しておくと、次の不等式の計算が楽になることである。
　さて、不等式

$$|2abx - a^2| < b^2$$

を満たす x の範囲を求めたい。
ところで、$a, b > 0$ だから、まずは普通に絶対値を外し、整理していくと、

$$-b^2 < 2abx - a^2 < b^2$$
$$\therefore\ a^2 - b^2 < 2abx < a^2 + b^2$$
$$\therefore\ \frac{a}{b} - \frac{b}{a} < 2x < \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

となる。
ここで大切なのは、$a, b > 0$ だから、いくらかけても割っても不等号の向きは変わらないというところである。
さらに、各辺で、あらかじめ計算しておいた文字式が表れているから代入すると、

$$8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} < 2x < 12 - 4\sqrt{6}$$
$$\therefore 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} < x < 6 - 2\sqrt{6} \qquad (\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{タ}})$$

と x の値の範囲が求まった。

〔2〕 n を自然数とし、

$$A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2$$

と置く。普通の因数分解により、(慣れない人は n^2 をかたまりとみる)

$$n^4 + 3n^2 + 2 = (n^2+1)(n^2+2) \qquad (\boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{ツ}})$$

と分解できるから、

$$\begin{aligned} A &= (n^4 + 3n^2 + 2) + (-2n^3 - 2n) \\ &= (n^2+1)(n^2+2) - 2n(n^2+1) \\ &= (n^2+1)(n^2+2-2n) \qquad (\boxed{\text{テ}}\sim\boxed{\text{ナ}}) \end{aligned}$$

となる。さらに、$n^2 - 2n + 2$ に関して、

$$n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \qquad (\boxed{\text{ニ}}\sim\boxed{\text{ヌ}})$$

と平方完成することができる。

さて、$A < 1000$ を満たす最大の整数 n を求めたい。
もう一度 A の式を整理すると、

$$\begin{aligned} A &= (n^2+1)(n^2+2-2n) \\ &= (n^2+1)\{(n-1)^2+1\} \end{aligned}$$

この式は一見複雑に見えるが、よく考えると、n と n^2+1 の値の表を作ればよくて、次の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7
n^2+1	2	5	10	17	26	37	50

ところで、$\sqrt{1000} \fallingdotseq 31.6\cdots$ だから、大体 31 近辺の数の積を考えればよくて、実際、

$$\begin{aligned} 26 \times 37 &= 26 \times 40 - 26 \times 3 \\ &= 1040 - 78 < 1000 \\ 37 \times 50 &> 20 \times 50 = 1000 \end{aligned}$$

となるから、$n = 6$ の時、

$$\begin{aligned} A &= (6^2+1)\{(6-1)^2+1\} \\ &= (6^2+1)(5^2+1) \\ &= 37 \times 26 < 1000 \end{aligned}$$

となって、求める答えは $n = 6$ となる。 ($\boxed{\text{ネ}}$)
この時、

$$\begin{aligned} A &= 37 \times 26 \\ &= 2 \times 13 \times 37 \qquad (\boxed{\text{ノ}}\sim\boxed{\text{ヘ}}) \end{aligned}$$

と因数分解される。

第 2 問

a, b, c を定数とし、$a \neq 0, b \neq 0$ とする。グラフ G について、

$$G : y = ax^2 + bx + c$$

で与えられている。
グラフ G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸を持つので、まず、

$$y = -3x^2 + 12bx = -3(x-2b)^2 + 48b^2$$

となって、軸は $x = 2b$ だとわかる。
ちなみに、微積分を理解していれば、

$$y' = -6x + 12b$$

なので、$y' = 0$ というのはつまり頂点で接するということだから、

$$y' = -6x + 12b = 0$$
$$\therefore \ x = 2b$$

となって、頂点の x 座標が $2b$ とわかり、すなわち、軸が $x = 2b$ だとわかる。
　さて、グラフ G について平方完成すると、

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

したがって、グラフ G の軸は $x = -\frac{b}{2a}$ なので、仮定から、

$$-\frac{b}{2a} = 2b$$
$$\therefore \ a = -\frac{1}{4} \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}})$$

　さらに、グラフ G が点 $(1, 2b-1)$ を通るので、代入すると、

$$2b - 1 = -\frac{1}{4} \times 1^2 + b \times 1 + c$$
$$\therefore \ c = b - \frac{3}{4} \qquad (\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{オ}})$$

という関係式を得る。
　以下、a, b, c に関してこの 2 つの条件を満たすグラフ G について考える。
　(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲を求める。
2 次方程式

$$-\frac{1}{4}x^2 + bx + \left(b - \frac{3}{4}\right) = 0$$

の判別式を D と置くと、

$$D = b^2 + 4 \times \frac{1}{4}\left(b - \frac{3}{4}\right) = b^2 + b - \frac{3}{4} = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(b - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{3}{2}\right)$$

今、2 点で交わるので、$D > 0$ だから、

$$\therefore \ b < -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} < b \qquad (\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{コ}})$$

　さらに、グラフ G と x 軸の性の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲を求めるには、

- G が x 軸と 2 点で交わる。(上で求めた範囲)
- G の軸が $x > 0$ である。
- グラフ G は上に凸なグラフだから、$x = 0$ のときの値は負である。

を満たす範囲となる。

まず、G の軸が $x > 0$ となるから、

$$2b > 0$$
$$\therefore \ b > 0$$

最後の条件について、$x = 0$ を代入すると、

$$b - \frac{3}{4} < 0$$
$$\therefore b < \frac{3}{4}$$

したがって、3 つの条件を合わせれば、

$$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4} \qquad (\boxed{サ} \sim \boxed{セ})$$

となる。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leq x \leq b$ におけるグラフ G の最小値が $-\frac{1}{4}$ である時、頂点は $x = 2b$ にあるのだから、$0 \leq x \leq b$ では単調に右上がりのグラフとなる。

したがって、最小値は $x = 0$ の時だから、

$$b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$\therefore \ b = \frac{1}{2} \qquad (\boxed{ソ} \sim \boxed{タ})$$

となる。

一方、$x \geq b$ におけるグラフ G の最大値が 3 である時、頂点は $x = 2b$ であり、$0 < b < 2b$ だから、$x = 2b$ の時最大値である。

ところで、グラフ G を平方完成すると、

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 + b - \frac{3}{4}$$

となるから、頂点は $(2b, b^2 + b - \frac{3}{4})$ となる。

今、$x = 2b$ で最大値 3 となるから、すなわち頂点が $(2b, 3)$ となるということなので、

$$b^2 + b - \frac{3}{4} = 3$$
$$\therefore \ \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 4$$
$$\therefore b = -\frac{1}{2} \pm 2 = \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$
$$\therefore b = \frac{3}{2} \qquad (\because b > 0) \qquad (\boxed{チ} \sim \boxed{ツ})$$

となる。

$b = \frac{1}{2}$ のとき、グラフ G_1 とする。この時、グラフ G_1 の頂点を求めると、$(1, 0)$ であるが、一方、$b = \frac{3}{2}$ のとき、グラフ G_2 とする。この時、グラフ G_2 の頂点を求めると、$(3, 3)$ となるので、グラフ G_1 を x 方向に 2、y 方向に 3 ずらせばグラフ G_2 と重なる。 $(\boxed{テ} \sim \boxed{ト})$

第3問

点 O を中心とする円 O の円周上に 4 点 A, B, C, D がこの順にあり、$AB = 2, CD = 2\sqrt{3}, BD = 2\sqrt{3}, AC = 4$ であるとする。
図より、$\triangle DBC$ は $BD = CD$ である 2 等辺三角形である。

(1) $\angle BAC = \theta, BC = x$ とおく。
まず、$\triangle ABC$ に関して余弦定理を用いると、

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos\theta$$
$$\therefore\ x^2 = 20 - 16\cos\theta \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{イ}})$$

となる。
一方、$\triangle DBC$ に関して余弦定理を用いると、

$$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}\cos\theta$$
$$\therefore\ x^2 = 24 - 24\cos\theta \qquad (\boxed{\text{ウ}} \sim \boxed{\text{エ}})$$

となる。
辺々引き算して x^2 を消去すれば、

$$0 = 4 - 8\cos\theta$$
$$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad (\boxed{\text{オ}} \sim \boxed{\text{カ}})$$

となる。
また、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$x^2 = 24 - 24 \times \frac{1}{2} = 12$$
$$\therefore\ x = 2\sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ク}})$$

と求まる。
すると、$\triangle BDC$ は 1 辺が $2\sqrt{3}$ の正三角形であることがわかるので、その重心が点 O と一致する。正弦定理で求めるならば、

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC} = 2R$$
$$(\text{左辺}) = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$$
$$\therefore R = 2 = (\text{円 } O \text{ の半径}) \qquad (\boxed{\text{ケ}})$$

別のやり方で求めるならば、点 D から BC に向かって垂線 DH を引く。ただし点 H は BC 上の点である。
すると、$BD = 3$
今、点 O は重心だから、BD を $2:1$ に内分するので、$OD = OB = 2$ となり、円 O の半径が求まる。

$\triangle BDC$ は正三角形だから、$\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$ なので、$\triangle ABC$ の面積は、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{サ}})$$

となる。

(2) 点 O を中心とする半径 2 の球を考える。点 P をこの球面上の点で、三角錐 $PABC$ の体積が最大となるような点とする。

つまり、$\triangle ABC$ に接している円 O は球の赤道に位置し、点 P は北極 (または南極) の位置にある。だから、三角錐の高さは $OP = 2$ となり、したがって、三角錐 $PABC$ の体積は

$$(\text{三角錐 } PABC) = 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad (\boxed{\text{シ}}\sim\boxed{\text{セ}})$$

である。

　また、OP は $\triangle ABC$ と直行してのだから、$\angle POA = 90°$。すなわち、$\triangle POA$ は $OP = OA = 2$ である直角 2 等辺三角形であるので、$PA = 2\sqrt{2}$ となる。　$(\boxed{\text{ソ}}\sim\boxed{\text{タ}})$

　さらに、点 P を中心とし、三角錐 $PABC$ を含む最小の球の表面積を求めたい。

ここで、$\angle ABC$ は半径 2 の円 O に内接しているのだから、$OA = OB = OC = 2$ である。

したがって、$PA = PB = PC = 2\sqrt{2}$ となるので、中心 P で半径 $2\sqrt{2}$ の球で三角錐 $PABC$ をすっぽり包み込める。よって、表面積は、

$$(\text{表面積}) = 4\pi(2\sqrt{2})^2 = 32\pi \qquad (\boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{ツ}})$$

である。

第4問

a, b は正の実数で、$\frac{a}{b}$ は整数でないとする。
$\frac{a}{b}$ を超えない最大の整数を m、$\frac{b}{a-bm}$ を超えない最大の整数を n とする。
したがって、

$$m < \frac{a}{b} < m+1, \qquad n \leq \frac{b}{a-bm} < n+1$$

を満たす整数である。

(1) $a = 17, b = 3$ の時、

$$\frac{a}{b} = \frac{17}{3} = 5.\cdots \quad \Longrightarrow m = 5 \qquad (\boxed{\text{ア}})$$

$$\therefore \frac{b}{a-bm} = \frac{3}{17-3\cdot 5} = \frac{3}{2} = 1.5 \quad \Longrightarrow n = 1 \qquad (\boxed{\text{イ}})$$

(2) $a = 20, b = \sqrt{2}$ の時、

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} = 14.\cdots \quad \Longrightarrow m \quad = 14 \qquad (\boxed{\text{ウ}}\sim\boxed{\text{エ}})$$

$$\therefore \frac{b}{a-bm} = \frac{\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}\cdot 14} = \frac{1}{10\sqrt{2}-14} = \frac{10\sqrt{2}+14}{200-196} = \frac{10\sqrt{2}+14}{4} = \frac{28.\cdots}{4} = 7.\cdots$$

$$\therefore n = 7 \qquad (\boxed{\text{オ}})$$

(3) $\frac{9}{4} < \frac{a}{b} \leq \frac{7}{3}$ であるとき、$\frac{9}{4} = 2.\cdots$、$\frac{7}{3} = 2.\cdots$ だから、$m = 2$ である。 $(\boxed{\text{カ}})$
したがって、$\frac{a}{b} - m$ の取り得る値の範囲は、

$$\frac{9}{4} - 2 < \frac{a}{b} - m \leq \frac{7}{3} - 2$$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{a}{b} - m \leq \frac{1}{3} \qquad (\boxed{\text{キ}}\sim\boxed{\text{コ}})$$

となる。

ここで、$\dfrac{a-bm}{b} = \dfrac{a}{b} - m$ であることに注意すると、

$$3 \leq \frac{b}{a-bm} < 4 \qquad (\boxed{\text{サ}}\sim\boxed{\text{シ}})$$

となるので、$n = 3$ と定まる。 $(\boxed{\text{ス}})$

(4) $m = n = 2$ となるときの $\frac{a}{b}$ の取り得る値の範囲を求めたい。

$$2 \leq \frac{b}{a-bm} < n+1 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} < \frac{a}{b} - m \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{a}{b} \leq \frac{5}{2}$$

一方、

$$2 < \frac{a}{b} < 3$$

であるから、両方合わせれば、

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{a}{b} \leq \frac{5}{2} \qquad (\boxed{\text{セ}}\sim\boxed{\text{チ}})$$

が求める範囲となる。