センター試験 (2011 年実施) 数学 II 解説

2011 年 1 月 16 日作成
2011 年 1 月 29 日修正

第 1 問

〔1〕 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のとき、関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ と置くと、

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 \\ &= \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1 \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{エ}}) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1) + \sqrt{3}\cdot 2\sin\theta\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1) - 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) - 2 \\ &= t^2 - 2t - 2 \qquad (\boxed{\text{オ}} \sim \boxed{\text{カ}}) \end{aligned}$$

となる。

一方、$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ に関して、点 $(1, \sqrt{3})$ は半径 2、偏角 $\frac{\pi}{3}$ なので、

$$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \qquad (\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ク}})$$

である。

次に、$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ より、

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \qquad (\boxed{\text{ケ}})$$

なので、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore\ & -1 \leq 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3} \\ \therefore\ & -1 \leq t \leq \sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{シ}}) \end{aligned}$$

である。

一方、

$$y = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$$

と変形すると、$t = 1$ は上の範囲に含まれているので、$t = 1$ のとき y は最小値 -3 となり、この時の θ を求めると、

$$\begin{aligned} & 1 = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \\ \therefore\ & \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \\ \therefore\ & \theta = -\frac{\pi}{6} \qquad (\boxed{\text{ス}} \sim \boxed{\text{タ}}) \end{aligned}$$

である。

〔2〕 自然数 x で、条件

$$12(\log_2 \sqrt{x})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0$$
$$x + \log_3 x < 14$$

を満たすものを求めよう。
まず、x を正の実数として、1 つ目の条件について考える。
$X = \log_2 x$ と置くと、

$$\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{1}{2}X$$
$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{X}{2}$$

となるので、1 つ目の条件は、

$$12\left(\frac{X}{2}\right)^2 - 7\cdot\frac{1}{2}X - 10 > 0$$
$$\therefore\ 6X^2 - 7X - 20 > 0 \qquad (\boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{テ}})$$
$$\therefore\ (3X+5)(2X-4) > 0$$
$$\therefore\ X < -\frac{5}{3}, 2 < X \qquad (\boxed{\text{ト}}\sim\boxed{\text{ヌ}})$$

ところで、x は自然数だから、$X > 0$ であるので、

$$2^2(=4) < x$$

となる。
したがって、1 つ目の条件を満たす最小の自然数 x は 5 である。 $(\boxed{\text{ネ}})$
　次に、2 つ目の条件を満たす自然数 x について考える。
まず、x は自然数だから、$x < x + \log_3 x < 14$ であるが、$3^2 < 14 < 3^3$ なので、

$$x + \log_3 x < 14$$
$$\therefore\ x < 14 - \log_3 x < 14 - \log_3 9 = 12$$

つまり、2 番目の条件を満たす最大の自然数は 11 となる。 $(\boxed{\text{ノ}}\sim\boxed{\text{ハ}})$

第 2 問

座標平面上で、放物線 $y = x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における C の接戦 l の方程式を求める。

まず、放物線の式 $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ なので、$x = a$ における接線の傾きは $2a$ である。

したがって、接線 l の式を求めると、

$$\begin{aligned} y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \therefore\ y &= 2ax - a^2 \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}) \end{aligned}$$

となる。

$a \neq 0$ のとき、直線 l が x 軸と交わる点を Q とすると、$y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= 2ax - a^2 \\ \therefore\ \ x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

よって、Q の座標は $(\frac{a}{2}, 0)$ である。　　$(\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{カ}})$

$a > 0$ のとき、曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx - \int_{\frac{a}{2}}^a (2ax - a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a - \left[ax^2 - a^2 x\right]_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - (a^3 - a^3) + \left(\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^3\right) \\ &= \frac{1}{12}a^3 \qquad (\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ケ}}) \end{aligned}$$

である。

$a < 2$ のとき、曲線 C と直線 l および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると、

$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2 x\right]_a^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}2^3 - 4a + 2a^2\right) - \left(\frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3\right) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \qquad (\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{セ}}) \end{aligned}$$

である。

　さて、$a = 0$ のときは $S = 0$、$a = 2$ のときは $T = 0$ であるとして、$U = S + T$ と置いて、$0 \leq a \leq 2$ に対して考える。

まず、

$$\begin{aligned} U &= S + T \\ &= \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となるので、U を a に関して微分すると、

$$U' = -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4$$

したがって、$U' = 0$ を解くと、

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 &= 0 \\
\frac{1}{4}a^2 - a^2 + 4a - 4 &= 0 \\
(\frac{1}{2}a)^2 - (a-2)^2 &= 0 \\
\frac{1}{2}a &= \pm(a-2) \\
\therefore\ a &= \frac{4}{3}, 4
\end{aligned}
$$

ここで増減表を書くと、

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
U'			0		
U	-4	↘	$\frac{8}{27}$	↗	$\frac{2}{3}$

となる。

したがって、$a = 0$ のとき、最大値 $\frac{8}{3}$ となり、$a = \frac{4}{3}$ のとき、最小値となる。 ($\boxed{\text{ソ}}$〜$\boxed{\text{ニ}}$)

　実は、3 次関数の形状を知っていれば、もう少し簡単に解ける。

まず、U の a^3 の係数が負であるから、大雑把に曲線は「↘↗↘」のような形状をしていることがわかる。

さらに、$a = 0$ における U の値と $a = 4$ における U の値が同じなので、$a = 2$ は今考えている範囲では最大値にはならない。

よって、$a = 0$ のとき最大値となる。

一方、$a = \frac{4}{3}$ のとき、極小なので、今の範囲では最小値となる。

まとめると、$a = 0$ のとき最大値となり、$a = \frac{4}{3}$ のとき最小値となる。

第3問

点 O を原点とする座標平面上に正六角形 $OABCDE$ がある。ただし、頂点は時計回りの針の開店と逆の向きに O,A,B,C,D,E の順に並んでいるものとする。また、直線 OA の方程式は $y=3x$、直線 BE の方程式は $y=3x+2$ であるとする。点 A,D の座標と正六角形 $OABCDE$ の外接円の方程式を求めよう。

原点を通り、直線 OA に垂直な直線 l の傾きは $-\frac{1}{3}$ なので、直線 l の方程式は、

$$y=-\frac{1}{3}x \qquad (\boxed{\text{ア}})$$

である。

一方、直線 CD について、正六角形であることに注意すると、直線 OA と直線 BE との距離は、直線 CD と直線 BE との距離と等しいので、

$$y=3x+4 \qquad (\boxed{\text{イ}}\sim\boxed{\text{ウ}})$$

とすぐに求まる。

D は l と直線 CD との交点であるから、

$$-\frac{1}{3}x=3x+4$$
$$\therefore\ x=-\frac{6}{5},\qquad y=\frac{2}{5}$$

よって、点 D の座標は $(-\frac{6}{5},\frac{2}{5})$ である。　$(\boxed{\text{エ}}\sim\boxed{\text{カ}})$

また、正六角形の性質から、$OA:OD=1:\sqrt{3}$ であるから、　$(\boxed{\text{キ}})$

$$\begin{aligned}OA&=\frac{1}{\sqrt{3}}OD\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{(-6)^2+2^2}}{5}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{10}}{5}\\&=\frac{2\sqrt{30}}{15} \qquad (\boxed{\text{ク}}\sim\boxed{\text{サ}})\end{aligned}$$

である。

$t>0$ として、$A=(t,3t)$ と置くと、$OA=\sqrt{t^2+9t^2}=\sqrt{10}t$ となるから、

$$\sqrt{10}t=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$
$$\therefore\ t=\frac{2\sqrt{3}}{15}$$

よって、点 A の座標は、$(\frac{2\sqrt{3}}{15},\frac{2\sqrt{3}}{5})$ と求まる。　$(\boxed{\text{シ}}\sim\boxed{\text{ソ}})$

最後に、外接円の中心は線分 AD の中点であり、その半径は正六角形の 1 辺の長さに等しいから、まず中点を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{15}-\frac{6}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{2}{5}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}-18}{15},\frac{2\sqrt{3}+2}{5}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{6}-9}{15},\frac{\sqrt{3}+2}{5}\right)\end{aligned}$$

したがって、外接円の方程式は、

$$\left(x+\frac{9-\sqrt{6}}{15}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}+2}{5}\right)^2=\frac{8}{15} \qquad (\boxed{\text{タ}}\sim\boxed{\text{ト}})$$

第 4 問

a, b は実数で、$P(x)$ は 2 次の整式であり、$Q(x)$ は 3 次の整式であるとする。$Q(x)$ は $P(x)$ で割り切れて、商が $x+a$ であるので、

$$Q(x) = P(x)(x+a) \qquad (\boxed{\text{ア}})$$

と表せる。

さらに、$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割ったとき、商が $x+b$、余りが $P(x)$ であるので、

$$\{P(x)\}^2 = (x+b)Q(x) + P(x) \qquad (\boxed{\text{イ}})$$

と表せる。

この 2 つの等式より、

$$\begin{aligned}\{P(x)\}^2 &= (x+b)Q(x) + P(x) \\ &= (x+b)P(x)(x+a) + P(x) \\ &= \{(x+a)(x+b)+1\}P(x) \qquad (\boxed{\text{ウ}})\end{aligned}$$

となるので、両辺 $P(x)$ で割れば、

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+a)(x+b)+1 \\ &= x^2 + (a+b)x + ab + 1 \qquad (\boxed{\text{エ}}\sim\boxed{\text{カ}})\end{aligned}$$

と求まる。

さて、$Q(x) = 0$ の三つの解を α, β, γ とする。

$Q(x) = 0$ の 1 つの解は $x = -a$ とわかっているから、残りの 2 つの解は $P(x) = 0$ から求まる。

$\alpha = -a$ と置いてよい。

すると、$P(x) = 0$ の解は $x = \beta, \gamma$ となる。$\alpha + \beta + \gamma = -5$ のとき、解と係数の関係から

$$\begin{aligned}&\beta + \gamma = -(a+b) \\ &\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = -a - (a+b) = -5 \\ &\therefore\ b = -2a + 5 \qquad (\boxed{\text{キ}}\sim\boxed{\text{ケ}})\end{aligned}$$

である。

このとき、$Q(x) = 0$ が虚数解を持つような a の取り得る値の範囲を求めたい。

解の 1 つである $x = -a$ は実数なので、$P(x) = 0$ の判別式を D と置くと、条件から、

$$\begin{aligned}&D = (a+b)^2 - 4ab - 4 < 0 \\ &(a-b)^2 - 4 < 0 \\ &-2 < a - b < 2 \\ &-2 < a - (-2a+5) < 2 \\ &-2 < 3a - 5 < 2 \\ &3 < 3a < 7 \\ &1 < a < \frac{7}{3} \qquad (\boxed{\text{コ}}\sim\boxed{\text{シ}})\end{aligned}$$

である。

一方、$\alpha\beta\gamma = -6$ の時、1 つの解は $x = \alpha = -a$ とわかっているから、$P(x) = 0$ の解 $x = \beta, \gamma$ について解と係数の

関係から、

$$\beta\gamma = ab + 1$$
$$\therefore\ \alpha\beta\gamma = -a(ab+1) = -6$$
$$\therefore\ a^2b + a = 6$$
$$\therefore\ b = \frac{6-a}{a^2} \qquad (\boxed{\textbf{ス}} \sim \boxed{\textbf{セ}})$$

である。
もし、2 つの b に関する条件が成り立つとき、1 つ目の式を 2 つ目の式の途中式に代入することにより、

$$a^2(-2a+5) + a = 6$$
$$\therefore\ -2a^3 + 5a^2 + a - 6 = 0$$
$$\therefore\ 2a^3 - 5a^2 - a + 6 = 0 \qquad (\boxed{\textbf{ソ}} \sim \boxed{\textbf{チ}})$$

となる。これを解く。
左辺に $a = 2$ を代入すると 0 になるので、

$$(a-2)(2a^2 - a - 3) = 0$$
$$\therefore\ (a-2)(2a-3)(a+1) = 0$$
$$\therefore\ a = 2, -1, \frac{3}{2} \qquad (\boxed{\textbf{ツ}} \sim \boxed{\textbf{ニ}})$$

の三つである。
このうち、$Q(x) = 0$ が虚数解を持つとき、上の a の範囲から、$a = 2, \frac{3}{2}$ のみなので、これを満たす a は 2 個である。
($\boxed{\textbf{ヌ}}$)