2016 年センター数学 IA 解答解説 Version1.2

@aporia_life

2016 年 1 月 17 日作成
2016 年 1 月 18 日更新

第 1 問

[1] a を実数とする。x の関数 $f(x) = (1+2a)(1-x) + (2-a)x$ を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1-2a)x + (1+2a) + (2-a)x \\ &= (-1-2a+2-a)x + 2a + 1 \\ &= (-3a+1)x + 2a + 1 \end{aligned}$$

となる。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を考える。

1 次関数であるから、傾きによって最小値は変わるので、$(-3a+1)$ が正か負かで分ける。

もし、$(-3a+1) \geqq 0$ のとき、すなわち、$a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき、右上がりの直線なので、$x=0$ の時が最小値となるから、

$$(最小値) = 2a+1$$

一方で、$(-3a+1) < 0$ のとき、すなわち、$a > \dfrac{1}{3}$ のとき、右下がりの直線なので、$x=1$ の時が最小値となるから、

$$(最小値) = -3a+1+2a+1 = -a+2$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において、常に $f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の範囲を求める。

(1) を踏まえて、右上がりの直線すなわち、$a \leqq \dfrac{1}{3}$ のときを考えると、

$$\begin{aligned} &2a+1 \geqq \frac{2(a+2)}{3} \\ &6a+3 \geqq 2a+4 \\ &4a \geqq 1 \\ &a \geqq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで、$a \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから、$\dfrac{1}{4} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ となる。

一方で、右下がりの直線すなわち、$a > \dfrac{1}{3}$ の時を考えると、

$$\begin{aligned} &-a+2 \geqq \frac{2(a+2)}{3} \\ &-3a+6 \geqq 2a+4 \\ &5a \leqq 2 \\ &a \leqq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ここで、$a > \dfrac{1}{3}$ であるから、$\dfrac{1}{3} < a \leqq \dfrac{5}{2}$

以上 2 つから、求める a の範囲は、$\dfrac{1}{4} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ である。

[2] 次の問いに答えよ。必要ならば、$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いても良い。

(1) A を有理数全体の集合、B を無理数全体の集合とする。空集合を ϕ と表す。

次の (i)〜(iv) が真の命題になるように当てはめなさい。

(i) A は有理数であり、$0=\dfrac{0}{1}$ を含むので、$A\supset\{0\}$ である。

(ii) $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数なので、$\sqrt{28}\in B$ である。

(iii) $A=\{0\}\cup A$ である。

(iv) 有理数と無理数に共通の要素はないので、$\phi=A\cap B$ である。

(2) 実数 x に対する条件 p,q,r を次のように定める。

$p:x$ は無理数

$q:x+\sqrt{28}$ は有理数

$r:\sqrt{28}x$ は有理数

具体的に並べると、

$p=\{\sqrt{7},2\sqrt{7},\cdots\}$

$q=\{1-2\sqrt{7},2-2\sqrt{7},\cdots\}$

$r=\{\sqrt{7},2\sqrt{7},3\sqrt{7},\}$

$\boxed{\text{p と q の条件について考える}}$

$p\to q$ について、p を満たす x は無理数だから、$x+\sqrt{28}$ も無理数なので、条件 q を満たさないから偽である。
反例は $x=\sqrt{7}$ である。

一方で、$q\to p$ について、q を満たす $x+\sqrt{28}$ が有理数のとき、
そこから $\sqrt{28}$ を引いた x そのものは無理数であるから、条件 p を満たすので真である。

よって、p は q であるための必要条件である。

$\boxed{\text{p と r の条件について考える}}$

$p\to r$ について、p を満たす x は無理数である。このとき、r を満たさない x が存在し、
反例として $x=\sqrt{3}$ とすれば、$\sqrt{28}x$ は無理数であるので偽となる。

一方で、$r\to p$ について、r を満たす x は $\sqrt{7}$ と有理数の積で表される。
ところが、$x=0$ の時も条件 r を満たすが、$x=0$ は無理数でないので、これが反例となり、偽となる。

よって、p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

[3] a を 1 以上の定数とし、x についての連立方程式

$$\begin{cases} x^2+(20-a^2)x-20a^2\leqq\ 0 \\ x^2+4ax\geqq\ 0 \end{cases}$$

を考える。上の不等式については、左辺を因数分解していくと、

$(x+20)(x-a^2)\leqq\ 0$

ここで、$1\leqq\ a$ より $1\leqq\ a^2$ であるから、$-20\leqq\ x\leqq\ a^2$ となる。

一方で、下の不等式については、左辺を因数分解していくと、

$x(x+4a)\geqq\ 0$

ここで、$1\leqq\ a$ より、$-4a\leqq\ -4$ であるから、

$x\leqq\ -4a,0\leqq\ x$ である。

この連立不等式を満たす負の実数が存在するような a の値の範囲を考えると、
上の解 $-20\leqq\ x\leqq\ a^2$ の一部に $x\leqq\ -4a$ となっている必要があるから、

$$\begin{cases} -20\leqq\ -4a \\ 1\leqq\ a \end{cases}$$

この上の不等式を解くと、$a\leqq\ 5$ となる。
したがって、$1\leqq\ a\leqq\ 5$ となる。

第 2 問

[1] $\triangle ABC$ の辺の長さと角の大きさを測ったところ、$AB=7\sqrt{3}$ および、$\angle ACB=60°$ であった。

この時、正弦定理より、外接円の半径を R と置くと、

$$2R=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=14$$

よって、外接円の半径 $R=7$ である。

外接円 O の、点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1) $2PA=3PB$ となる時を考える。

式変形して文字を置いて考える。

$\frac{PA}{3}=\frac{PB}{2}=k$ と置けば、

$PA=3k, PB=2k$ となる。

ここで、円周角の定理より、$\angle APB=60°$ であるから、点 A から PB に垂線を下ろした交点を Z とするとき、三平方の定理より、

$ZP=\frac{3}{2}k, AZ=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$ となる。

よって、$ZB=\frac{1}{2}k$ となるから、三平方の定理より、

$$(7\sqrt{3})^2=\frac{1}{4}k^2+\frac{27}{4}k^2$$
$$49\times 3=k^2\frac{28}{4}$$
$$49\times 3=k^2\times 7$$
$$k^2=21$$
$$k=\sqrt{21}$$

よって、$PA=3k=3\sqrt{21}$ となる。

(2) $\triangle PAB$ の面積が最大になるときを考える。

このとき、$PA=PB$ であるから、点 P から AB に垂線を下ろし、交点を Y と置く。

すると、$\angle APY=\angle BPY=30°$ であり、$AY=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ であるから、三平方の定理より、$PA=2AY=7\sqrt{3}$ となる。

(3) $\sin\angle PBA$ の値が最大になる時を考える。円周角の定理より $\angle APB=60°$ であるから、

$\angle PAB+\angle PBA=120°$ となる。

ここで、$\sin PBA$ が最大になるとき、$\angle PBA=90°$ の時である。

このとき、AP は外接円 O の直径になるから、$AP=2\times 7=14$ となる。

さらに、$\angle PAB=30°$ であるから、$AB=7\sqrt{3}, PB=7$ なので、このときの面積は、

$7\sqrt{3}\times 7\times\frac{1}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{2}$ となる。

[2] 次の 4 つの散布図は、2003 年から 2012 年までの 120 ヶ月の東京の月別データをまとめたものである。それぞれ、1 日の最高気温の月平均 (以下、平均最高気温)、1 日あたりの平均降水量、平均湿度、最高気温 25 ℃以上の日数の割合を横軸に取り、各世帯の 1 日あたりアイスクリームの平均購入額（以下、購入額）を縦軸としてある。

これらの散布図から読み取れることについて考える。

(0) 平均最高気温が高くなるほど購入額が増えているので**真**。

(1) 1 日あたりの平均降水量が多くなるほど購入額がないので**偽**。

(2) 平均湿度が高くなるほど購入額の散らばり（縦）が広がっているので**偽**。

(3) 25 ℃以上の日数の割合が 80 ％未満の月（横軸）は、購入額が 30 円未満なので**真**。

(4) 正の相関があるのは、平均最高気温と購入額の間も含まれるので**偽**。

[3] 世界 4 都市（東京、O 市、N 市、M 市）の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータについて考える。

(1) 次のヒストグラムは東京、N 市、M 市のデータをまとめたものである。この 3 都市の箱ひげ図は下の a, b, c のいずれかである。

箱ひげ図について考えるとき、第一四分位を考える。ここで、全体の要素の個数は 365 日（365 個）であるから、4 分の 1 ではおおよそ 91 個。

東京のグラフについて、左から要素の総和が 91 個あたりとなるのは、10〜15 ℃なので、対応する箱ひげ図は **c**。

N 市のグラフについて、左からの要素の総和が 91 個あたりとなるのは、5〜10 ℃なので、対応する箱ひげ図は **b**。

M 市のグラフについて、左からの要素の総和が 91 個あたりとなるのは、15〜20 ℃なので、対応する箱ひげ図は **a**。

(2) 次の 3 つの散布図は、東京、O 市、N 市、M 市の 2013 年の 365 日の各日の最高気温のデータをまとめたものである。それぞれ、O 市、N 市、M 市の最高気温を縦軸に取り、東京の最高気温を横軸にとってある。

これらの散布図から読み取れることについて考える。

(0) 東京と N 市の最高気温の間には正の相関であるが、東京都 M 市の最高気温の間には負の相関なので**偽**。

(1) 東京と N 市の最高気温の間には正の相関、東京と M 市の最高気温の間には負の相関があるので**真**。

(2) 東京と N 市の最高気温の間には正の相関があるので**偽**。

(3) 東京と O 市の最高気温の間の相関のほうが、東京と N 市の最高気温の間の相関より強いのは、散らばり具合が集まっているので**真**。

(4) 東京と O 市の最高気温の間の相関のほうが、東京と N 市の最高気温の間の相関より強いのは、散らばり具合が集まっているので**偽**。

(3) N 市では温度の単位として摂氏（℃）のほかに華氏 (°) も使われている。華氏 (°) での温度は、摂氏（℃）での温度を $\frac{9}{5}$ 倍し、32 を加えると得られる。例えば、摂氏 10 ℃は、$\frac{9}{5}$ 倍し 32 加えることで華氏 50(°) となる。

ここで、摂氏 x ℃に対して、華氏 $y°F$ と置くと、

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

となる。

ここで、x の平均を μ_x、y の平均を μ_y とすると、

$$\mu_y = \frac{9}{5}\mu_x + 32$$

となる。

N 市の最高気温について、摂氏での分散を X、華氏での分散を Y とする。ここで、分散は、平均に対する散らばる範囲の平均であるから、係数の 2 乗に左右されるので、

$$Y = \frac{81}{25}X$$

よって、$\frac{Y}{X} = \frac{81}{25}$

東京（摂氏）と N 市（摂氏）の共分散を Z、東京（摂氏）と N 市（華氏）の共分散を W とする。共分散について、東京側の係数と N 市側の係数の積に左右されるので、

$$W = 1 \times \frac{9}{5} \times Z(\because 東京の係数 = 1, N\ 市の係数 = \frac{9}{5})$$

よって、$\frac{W}{Z} = \frac{9}{5}$

東京（摂氏）と N 市（摂氏）の相関係数を U、東京（摂氏）と N 市（華氏）の相関係数を V とする。相関係数は $\frac{共分散の係数}{\sqrt{東京の分散の係数}\sqrt{N\ 市の分散の係数}}$ に左右されるので、

$$V = \frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{81}{25}}}U = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5}}U = U$$

よって、$\frac{V}{U} = 1$

※豆知識

x の平均を μ_x と置くと、$\mu_x = E(x)$ と書ける。つまり x に関する期待値である。

この記法を用いると、例えば $3x$ の平均は $E(3x)$ であるが、全体的に 3 倍しているので、平均も 3 倍になり、したがって　$E(3x) = 3E(x)$

となる。つまり係数が外にそのまま出る。

すると、分散を求める式については、

$$E((x-\mu_x)) = E(x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2)$$
$$= E(x^2) - 2E(x\mu_x) + E(\mu_x^2)$$
$$= E(x^2) - 2\mu_x E(x) + \mu_x^2$$
$$= E(x^2) - 2\mu_x \times \mu_x + \mu_x^2$$
$$= E(x^2) - \mu_x^2$$

という式が導ける。これを用いると、

$$\mu_y = E(y) = E\left(\frac{9}{5}x + 32\right) = \frac{9}{5}E(x) + 32 = \frac{9}{5}\mu_x + 32$$

分散 X と Y の関係式については、

$$Y = E(y^2) - \mu_y^2 = E\left(\left(\frac{9}{5}x + 32\right)^2\right) - \left(\frac{9}{5}\mu_x + 32\right)^2$$
$$= E\left(\frac{81}{25}x^2 + \frac{9}{5}\cdot 32 \cdot 2x + 32^2\right) - \left(\frac{9}{5}\mu_x + 32\right)^2$$
$$= \frac{81}{25}E(x^2) + \frac{9}{5}\cdot 32 \cdot 2E(x) + 32^2 - \frac{81}{25}\mu_x^2 - \frac{9}{5}\cdot 32 \cdot 2\mu_x - 32^2$$
$$= \frac{81}{25}E(x^2) + \frac{9}{5}\cdot 32 \cdot 2\mu_x + 32^2 - \frac{81}{25}\mu_x^2 - \frac{9}{5}\cdot 32 \cdot 2\mu_x - 32^2$$
$$= \frac{81}{25}\left(E(x^2) - \mu_x^2\right) = \frac{81}{25}X$$

となることが導ける。

第 3 問

赤球 4 個、青球 3 個、白球 5 個、合計 12 個の球がある。これら 12 個の球を袋の中に入れ、この袋からＡさんがまず 1 個取り出し、その球を戻さずに続いてＢさんが 1 個取り出す。

(1) ＡさんとＢさんが取り出した 2 個の球のなかに、赤球か青球が少なくとも 1 個含まれている確率を考える。このとき、余事象として、「赤球も青球も含まれていない確率」を考える。すると、12 個の中から白球 2 個選んで取り出す確率であるから、

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{\frac{5\times 4}{2\times 1}}{\frac{12\times 11}{2\times 1}}$$
$$= \frac{5\times 1}{3\times 11}$$
$$= \frac{5}{33}$$

よって、$1-\dfrac{5}{33}=\dfrac{28}{33}$ である。

(2) A さんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率を考える。

まず、Aさんは 12 個から赤球 4 個のうち 1 個選び、次に、B さんは残る 11 個から白球 5 個のうち 1 個選ぶ確率であるから、

$$\frac{4}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{33} \text{ である。}$$

これより、A さんが取り出した球が赤球であったとき、B さんが取り出した球が白球である条件付確率を考える。

このとき、A さんが赤球を取り出す確率は $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ であるから、求める確率は、

$$\frac{A\text{ さんが赤球かつ B さんが白球を取り出す確率}}{\text{A さんが赤球を取り出す確率}}=\frac{\frac{5}{33}}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{11} \text{ である。}$$

(3) A さんは 1 球取り出したのち、その色を見ずにポケットの中にしまった。B さんが取り出した球が白球であることがわかった時、A さんが取り出した球も白球であった条件付確率を求めたい。

A さんが赤球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は $\dfrac{5}{33}=\dfrac{20}{132}$ であった。

A さんが青球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率を考える。

(1) と同様に考察すると、まず、12 個の球から青球 3 個のうち 1 個選び、次に残る 11 個の球から白球 5 個のうち 1 個選ぶので、

$$\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{15}{132}$$

次に、A さんが白球を取り出し、かつBさんが白球を取り出す確率は (1) の余事象の部分で考察した通り、

$$\frac{5}{33}=\frac{20}{132} \text{ である。}$$

これらはすべて排反であるから、B さんが白球を選ぶ確率は、

$$\frac{20}{132}+\frac{15}{132}+\frac{20}{132}=\frac{55}{132}=\frac{5}{12} \text{ である。}$$

よって、求める条件付確率は、

$$\frac{A\text{ さんが赤球かつ B さんが白球を取り出す確率}}{B\text{ さんが白球を取り出す確率}}=\frac{\frac{5}{33}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{33}=\frac{4}{11} \text{ である。}$$

第 4 問

(1) 不定方程式

$$92x+197y=1$$

を満たす整数 x,y の組の中で、x の絶対値が最小のものを考える。

92 と 197 に関するユークリッドの互除法を実行すると、

$$197=92\times 2+13$$

$$92=13\times 7+1$$

であるから、式を変形していくと、

$$1=92-13\times 7=92-(197-92\times 2)\times 7=92-197\times 7+92\times 14=92\times 15+197\times(-7)$$

よって、$x=15, y=-7$ となる。

次に、不定方程式

$$92x+197y=10$$

を満たす x,y の組の中で、x の絶対値が最小のものを考える。

(1) より、式を変形していくと

$$10=92\times 150+197\times(-70)=92\times 197-92\times 47+197\times(-70)=92\times(-47)+197\times 22$$

よって、$x=-47, y=22$ となる。

(2) 2 進法で $11011_{(2)}$ と表される数を 4 進法で表すことを考える。

$11011_{(2)}=1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^1+1\times 2^0$

$=1\times 4^2+2\times 4^1+2\times 4^0+1\times 4^0$

$=1\times 4^2+2\times 4^1+3\times 4^0$

$=123_{(4)}$ である。

次の 6 進法の小数のうち、10 進数で表すと有限小数として表せるものを考える。

(0) $0.3_{(6)}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0.5$

(1) $0.4_{(6)}=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $0.33_{(6)}=3\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{36}=0.5+\frac{1}{12}$

(3) $0.43_{(6)}=4\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{36}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0.75$

(4) $0.033_{(6)}=3\times\frac{1}{36}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{12}+\frac{1}{72}=\frac{6}{72}+\frac{1}{72}=\frac{7}{72}$

(5) $0.043_{(6)}=\frac{1}{6}\times 0.43_{(6)}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}=0.125$

第 5 問

四角形 ABCD において、$AB=4, BC=2, DA=DC$ であり、4 つの頂点 A, B, C, D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E、線分 AD を $2:3$ の比に内分する点を F、直線 FE と直線 DC の交点を G とする。

$\angle ABC$ の大きさが変化する時、四角形 $ABCD$ の外接円の大きさも変化することに注意すると、$\angle ABC$ の大きさがいくらであっても、$\angle DAC$ と大きさが等しい角を考えると、

まず、$DA=DC$ より、$\angle DAC=\angle DCA$ である。

次に、円周角の定理より、$\angle DAC=\angle DBC$ である。

同様に、円周角の定理より、$\angle DBA=\angle DCA=\angle DAC$ である。

このことより、$\frac{EC}{AE}$ を考える。DB は $\angle ABC$ の二等分線になっているので、

$AE:CE=BA:BC=4:2=2:1$

よって、$\frac{EC}{AE}=\frac{1}{2}$ である。

次に、$\triangle ACD$ と直線 FE に着目して、$\frac{GC}{DG}$ について考える。

メネラウスの定理より、

$\frac{GC}{DG}\cdot\frac{EA}{CE}\cdot\frac{FD}{AF}=1$

$\frac{GC}{DG}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=1$

$\frac{GC}{DG}=\frac{1}{3}$

である。

(1) AB が点 G を通る場合について考える。

このとき、$\angle AGD$ の辺 AG 上に点 B があることに注意して考える。

チェバの定理より、

$\frac{AB}{BG}\cdot\frac{GC}{CD}\cdot\frac{DF}{FA}=1$

$\frac{4}{BG}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$

$\dfrac{3}{BG} = 1$
$BG = 3$ である。

また、直線 AB と直線 DC が点 G で交わり、4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるので、方べきの定理より、

$AG \times BG = DG \times CG$

ここで、$CG = k$ とおくと、$DG = 3k$ となるので、

$7 \times 3 = 3k \times k$

$21 = 3k^2$

$k^2 = 7$

$k = \sqrt{7}$

よって、$DC = 2k = 2\sqrt{7}$

(2) 四角形 $ABCD$ の外接円の直径が最小となる場合について考える。

四角形 $ABCD$ の外接円は三角形 ABC の外接円でもある。

ここで、$AB = 4$ より、

(外接円の直径) ≧ 4

よって、外接円の直径の最小は 4 である。

すると、正弦定理より、

$4 = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC} = \dfrac{2}{\sin \angle BAC}$

$\sin \angle BAC = \dfrac{1}{2}$

$\angle BAC = 30^\circ$

となる。

※補足

$4 = \dfrac{AB}{\sin \angle ACB} = \dfrac{4}{\sin \angle ACB}$

$\sin \angle ACB = 1$

$\angle ACB = 90^\circ$

となる。

また、直線 FE と直線 AB の交点を H とするとき、$\dfrac{GC}{DG} = \dfrac{1}{3}$ の関係に着目して AH を求める。

$\angle BAC = 30^\circ$

$\angle ABC = 60^\circ$ より、$\angle ADC = 120^\circ$

$AD = CD$ より $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$

よって、$\angle BAC = \angle DCA$ なので、$AB // DC$

すると、

$\angle BAC = \angle ABD = \angle CDB = \angle ACD = 30^\circ$ より、

$\triangle EAB \backsim \triangle ECD$

$AE : CE = 2 : 1$ より、

$CD = 2$

$\dfrac{GC}{DG} = \dfrac{1}{3}$ より、

$GC = 1$

また、$\triangle AEH \backsim \triangle CEG$ かつ、$AE : CE = 2 : 1$ より、

$AH = 2$ となる。