2017年センター数学2B解答解説Version1

2016年1月15日作成

第1問

[1] 連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots(1) \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots(2) \end{cases}$$

を考える。ただし、

$$0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$$

であり、

$$\alpha < \beta$$

かつ

$$|\cos\alpha| \geq |\cos\beta| \qquad \cdots(3)$$

とする。このとき、$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求める。
2倍角の公式を用いると、

$$(2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) = \frac{4}{15}$$

$$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1 = \frac{4}{15}$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = \frac{34}{15}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{17}{15}$$

が得られる。また、

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = (\cos\alpha\cos\beta)^2$$

$$= \left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{15}$$

である。したがって、x を変数として解が $\cos^2\alpha, \cos^2\beta$ となる2次方程式をたてると、

$$x^2 - \frac{17}{15}x + \frac{4}{15} = 0$$

$$15x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$(3x-1)(5x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{5}$$

ここで、$|\cos\alpha| \geq |\cos\beta|$ より、$|\cos^2\alpha| \geq |\cos^2\beta|$ であるから、

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos^2\beta = \frac{1}{3}$$

となる。

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、$(\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ の $\alpha) < (\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の $\beta) < (\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ の $\beta) < (\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ の $\alpha)$ であるが、

$\cos\alpha\cos\beta < 0$ と $\alpha < \beta$ より、

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

である。

[2] 座標平面上に点 $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ をとり、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $B(p, \log_2 p), C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき、p, q の値を求める。

真数の条件により、$p > 0, q > 0$ である。

ただし、対数 $\log_a b$ に対し、a を底といい、b を真数という。

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は、

$$\left(\frac{2\times 0 + 1\times p}{1+2}, \frac{2\times\frac{3}{2} + 1\times\log_2 p}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{3}, \frac{3+\log_2 p}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}p, \frac{1}{3}\log_2 p + 1\right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p = q & \cdots(4) \\ \frac{1}{3}\log_2 p + 1 = \log_2 q & \cdots(5) \end{cases}$$

が成り立つ。式 (5) について、

$$\frac{1}{3}\log_2 p + 1 = \log_2 q$$

$$\log_2 p + 3 = 3\log_2 q$$

$$\log_2 p + \log_2 2^3 = \log_2 q^3$$

$$\log_2(p\times 2^3) = \log_2 q^3$$

$$p\times 2^3 = q^3$$

$$8p = q^3$$

$$p = \frac{1}{8}q^3$$

と変形できる。これを式 (4) と連立させることで、

$$p = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}p\right)^3$$

$$p = \frac{1}{8} \times \frac{1}{27}p^3$$

$p > 0$ ゆえに $p \neq 0$ であるから、

$$1 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{27}p^2$$

$$8 \times 27 = p^2$$

$$2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3 = p^2$$

$$2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{3} = p$$

$$\therefore p = 6\sqrt{6}$$

$q = \dfrac{1}{3}p$ より、

$$\therefore q = 2\sqrt{6}$$

である。また、C の y 座標 $\log_2(2\sqrt{6})$ の値を求める。

$$\begin{aligned}\log_2(2\sqrt{6}) &= \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{0.4771}{0.301} \\ &\fallingdotseq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1.59 \\ &= 1 + 0.5 + 0.795 \\ &= 2.295 \\ &\fallingdotseq 2.3\end{aligned}$$

第 2 問

O を原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし、点 $(a, 2a)$ を P とする。

(1) 点 P を通り、放物線 C に接する直線の方程式を求める。

C 上の点 $(t, t^2 + 1)$ における接線の方程式を求める。

1 回微分して $y' = 2x$ であるから、接戦の傾きは $2t$ である。よって、

$$y - (t^2 + 1) = 2t(x - t)$$

$$y = 2tx - 2t^2 + t^2 + 1$$

$$y = 2tx - t^2 + 1$$

である。この直線が P を通るとすると、

$$2a = 2ta - t^2 + 1$$

$$t^2 - 2ta + 2a - 1 = 0$$

という t の方程式となる。変形すると、

$$(t^2 - 1) - 2a(t - 1) = 0$$

$$(t + 1)(t - 1) - 2a(t - 1) = 0$$

$$(t-1)(t+1-2a)=0$$

よって、$t=2a-1, 1$ である。

$2a-1\neq 1$ であるとき、接線は 2 本存在する。

つまり、$a\neq 1$ のとき、接線は 2 本存在する。

$t=2a-1$ に関する接線は、

$$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$$

$$y=(4a-2)x-4a^2+4a-1+1$$

$$y=(4a-2)x-4a^2+4a \qquad \cdots(1)$$

となる。
一方で、$t=1$ に関する接線は、

$$y=2x-1+1$$

$$y=2x$$

となる。

(2) (1) の方程式 (1) で表される直線を l とする。l と y 軸との交点を $R(0,r)$ とすると、切片なので、

$$r=-4a^2+4a$$

である。
そこで、$r>0$ となる場合を考える。

$$-4a^2+4a>0$$

$$a^2-a<0$$

$$a(a-1)<0$$

$$0<a<1$$

このとき、三角形 OPR の面積 S について、

$$S=a\times(-4a^2+4a)\times\frac{1}{2}$$

$$=2a^2-2a^3$$

$$=2(a^2-a^3)$$

となる。
$0<a<1$ のとき、S の増減を調べる。

$$S'=4a-6a^2=0$$

$$3a^2-2a=0$$

$$a=0,\ \frac{2}{3}$$

増減表を書くと、

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'	0	$+$	0	$-$	$-$
S	0		$\frac{8}{27}$		0

よって、S は $a=\frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{8}{27}$ をとる。

(3) $0<a<1$ のとき、放物線 C と (2) の直線 l および 2 直線 $x=0, x=a$ で囲まれた図形の面積を T とする。
まず、接点の $2a-1$ について、$0<a<1$ より、$2a-1<a$ が成り立つ。
よって、

$$T=\int_0^a (x^2+1-2(2a-1)x+(2a-1)^2-1)dx$$

$$= \int_0^a (x^2 - 2(2a-1)x + (2a-1)^2)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - (2a-1)x^2 + (2a-1)^2 x\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - (2a-1)a^2 + (2a-1)^2 a$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - (2a-1)a(a-2a+1)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - (2a-1)a(-a+1)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 + (2a-1)a(a-1)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 + (2a^3 - a^2 - 2a^2 + a)$$
$$= \frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a$$

そこで、$\frac{2}{3} \leq a < 1$ の範囲において考える。

$$T' = 7a^2 - 6a + 1$$
$$T'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} > 0$$
$$T'(1) = 2 > 0$$

よって、$\frac{2}{3} \leq a < 1$ の範囲において増加する。

第 3 問

(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき、$s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 4$ であるので、

$$s_1 s_2 s_3 = 4$$
$$s_1 + s_2 + s_3 = 7$$

(2) $\{s_n\}$ を初項 x、公比 r の等比数列とする。a, b を実数 $(a \neq 0)$ とし、$\{s_n\}$ の最初の 3 項が、

$$\begin{cases} s_1 s_2 s_3 = a^3 & \cdots(1) \\ s_1 + s_2 + s_3 = b & \cdots(2) \end{cases}$$

を満たすとする。

$$\begin{cases} x \times xr \times xr^2 = a^3 \\ x + xr + xr^2 = b \end{cases}$$

式 (1) から、

$$x^3 r^3 = a^3$$
$$xr = a \qquad \cdots(3)$$

さらに、式 (2) と式 (3) を用いて、r, a, b の表す関係式を求める。

$$x + xr + xr^2 = b$$
$$xr + xr^2 + xr^3 = br$$
$$xr(1 + r + r^2) = br$$
$$a(1 + r + r^2) = br$$

$a+ar+ar^2=br$

$ar^2+(a-b)r+a=0$

これを満たす実数 r が存在するので、a に関する判別式をたてると、

$(a-b)^2-4\times a\times a\geq 0$

$a^2-2ab+b^2-4a^2\geq 0$

$3a^2+2ab-b^2\leq 0$

となる。

(3) $a=64, b=336$ の場合を考える。(2) の条件について、公比が 1 より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える。

$64r^2+(64-336)r+64=0$

$64r^2-272r+64=0$

$8r^2-34r+8=0$

$4r^2-17r+4=0$

$(4r-1)(r-4)=0$

$\therefore r=\frac{1}{4},\ 4$

ここで、公比は 1 より大きいので、$r=4$

よって

$x\times 4=64$

$\therefore x=16$

すると、公比 4、初項 16 の数列 $\{s_n\}$ は、

$s_n=16\times 4^{n-1}=4^{n+1}$

$\{s_n\}$ を用いて、数列 $\{t_n\}$ を $t_n=s_n\log_4 s_n$ と定める。

$t_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}$

$=4^{n+1}\times(n+1)$

$=(n+1)\cdot 4^{n+1}$

$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n を考える。

$U_n=2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\cdots+(n+1)\cdot 4^{n+1}$

$4U_n=2\cdot 4^3+\cdots+(n)\cdots 4^{n+1}+(n+1)\cdot 4^{n+2}$

よって、U_n-4U_n を計算すると、

$-3U_n=2\cdot 4^2+(4^3+\cdots+4^{n+1})-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$-3U_n=32+4^3(1+\cdots+4^{n-2})-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$-3U_n=32+4^3\frac{4^{n-1}-1}{4-1}-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$-3U_n=32+\frac{4^{n+2}}{3}-\frac{64}{3}-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$-3U_n=\left(\frac{1}{3}-(n+1)\right)4^{n+2}+\frac{96}{3}-\frac{64}{3}$

$-3U_n=\left(\frac{-2}{3}-n\right)\ 4^{n+2}+\frac{32}{3}$

$-3U_n=\frac{-2-3n}{3}\,4^{n+2}+\frac{32}{3}$

$$U_n = \frac{2+3n}{9}\,4^{n+2} - \frac{32}{9}$$

$$\therefore U_n = \frac{3n+2}{9}\,4^{n+2} - \frac{32}{9}$$

第 4 問

座標平面上に点 $A(2,0)$ をとり、原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B,C,D,E,F を、点 A,B,C,D,E,F が順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし、B は第 1 象限にあるとする。

(1) 点 B の座標について、第 1 象限にあるので、偏角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから、

$$B(1, \sqrt{3})$$

一方で、点 D は x 軸上にあるので、$D(-2,0)$ となる。

(2) 線分 BD の中点を M とする。

$$M\left(\frac{1-2}{2}, \frac{\sqrt{3}+0}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。

直線 AM と直線 CD の交点を N とし、$\overrightarrow{ON}$ を求める。

$$\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{2} - 2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

一方で、

$$C(-1, \sqrt{3})$$

であるので、

$$\overrightarrow{DC} = (-1+2, \sqrt{3}-0) = (1, \sqrt{3})$$

$\overrightarrow{ON}$ について、実数 r, s を用いて、$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AM}$ と置くと、

$$\overrightarrow{ON} = (2,0) + r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2 - \frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

一方で、$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{DC}$ と置く。

$$\overrightarrow{ON} = \left(-2+s,\ \sqrt{3}s\right)$$

よって、

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{5}{2}r = -2 + s & \cdots(1) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}s & \cdots(2) \end{cases}$$

式 (2) より、$r = 2s$

これを式 (1) に代入すると、

$$2 - 5s = -2 + s$$

$$-6s = -4$$

$$s = \frac{2}{3}$$

$$\therefore r = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{ON} = \left(-2 + \frac{2}{3},\ \sqrt{3} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{ON} = \left(-\frac{4}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

(3) 線分 BF 上に点 P をとり、その y 座標を a とする。
$P(1, a)$ となる。

$$\overrightarrow{EP} = (1+1, a+\sqrt{3}) = (2, a+\sqrt{3})$$

点 P から直線 CE に引いた垂線と CE との交点を K とすると、

$$K(-1, a)$$

点 C から直線 EP に引いた垂線と EP との交点を L とすると、

直線 PK と直線 CL の交点を H とする。

$\overrightarrow{OH} = (u, 0)$ とすると、

$$\overrightarrow{CH} = (u+1, a-\sqrt{3})$$

$\overrightarrow{CH}$ と $\overrightarrow{EP}$ が垂直の関係なので、

$$2 \times (u+1) + (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) = 0$$

$$2u + 2 + a^2 - 3 = 0$$

$$2u + a^2 - 1 = 0$$

$$2u = 1 - a^2$$

$$u = \frac{1-a^2}{2}$$

よって、

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{-a^2+1}{2},\ a \right)$$

さらに、$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OH}$ のなす角を θ とする。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{-a^2+1}{2} + a^2 = \frac{a^2+1}{2}$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2+1}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}| &= \sqrt{\frac{(-a^2+1)^2}{4} + a^2} \\ &= \sqrt{\frac{(-a^2+1)^2 + 4a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}}{2} \\ &= \frac{a^2+1}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\frac{a^2+1}{2}}{\sqrt{a^2+1} \times \frac{a^2+1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

ここで、$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ となるので、

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{12}{13}$$

$$\sqrt{a^2+1}=\frac{13}{12}$$

$$a^2+1=\frac{169}{144}$$

$$a^2=\frac{25}{144}$$

$$a=\pm\frac{5}{12}$$

第 5 問 (1) 1 回の試行において、事象 A の起こる確率が p、起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき、事象 A の起こる確率を W とする。この事象は二項分布に従う。

確率変数 W の平均 (期待値)m が $\frac{1216}{27}$、標準偏差 σ が $\frac{152}{27}$ であるとする。

試行回数 n 回、起こる確率を p とした時、二項分布における平均値は np、標準偏差は $np(1-p)$ であるので、

$$\begin{cases} np=\dfrac{1216}{27} \\ np(1-p)=\left(\dfrac{152}{27}\right)^2 \end{cases}$$

すると、

$$\frac{1216}{27}(1-p)=\frac{152}{27}\times\frac{152}{27}$$

$$\frac{8\times152}{27}(1-p)=\frac{152}{27}\times\frac{152}{27}$$

$$8(1-p)=\frac{152}{27}$$

$$1-p=\frac{19}{27}$$

$$p=1-\frac{19}{27}$$

$$p=\frac{8}{27}$$

よって

$$n\times\frac{8}{27}=\frac{1216}{27}$$

$$n\times\frac{8}{27}=\frac{8\times152}{27}$$

$$n=152$$

(2) (1) の反復試行において、W が 38 以上となる確率の近似値を求める。

$$P(W\geq38)=P(W-m\geq38-m)$$

$$=P(W-m\geq38-\frac{1216}{27})$$

$$=P(W-m\geq\frac{1026}{27}-\frac{1216}{27})$$

$$=P(W-m\geq-\frac{190}{27})$$

$= P(\frac{W-m}{\sigma} \geq \frac{-\frac{190}{27}}{\sigma})$

$= P(\frac{W-m}{\sigma} \geq \frac{-\frac{190}{27}}{\frac{152}{27}})$

$= P(\frac{W-m}{\sigma} \geq \frac{-190}{152})$

$= P(\frac{W-m}{\sigma} \geq -1.25)$

と変形できる。ここで、$Z = \frac{W-m}{\sigma}$ とおき、W の分布を正規分布で近似する。

$P(Z \geq -1.25) = P(-1.25 \leq Z)$

$= P(-1.25 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z)$

$= P(0 \leq Z \leq 1.25) + P(0 \leq Z)$

$= 0.3944 + 0.5$

$= 0.8944$

$\fallingdotseq 0.89$

(3) 連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leq x \leq t$ で、確率密度関数が $f(x)$ のとき、X の平均 $E(X)$ は

$$\int_s^t xf(x)dx$$

で与えられる。

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leq x \leq 2a$ で、確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leq x \leq 0) \\ \frac{2}{3a^2}(2a-x) & (0 \leq x \leq 2a) \end{cases}$$

であるとする。

このとき、$a \leq X \leq \frac{3}{2}a$ となる確率は

$$\int_a^{\frac{3}{2}a} f(x)dx \qquad = \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{3a^2}(2a-x)dx$$

$$= \frac{1}{3a^2}\int_a^{\frac{3}{2}a}(2a-x)dx$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left[2ax - \frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left\{\left(2a \cdot \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}a^2\right) - \left(2a^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left(3a^2 - \frac{9}{8}a^2 - 2a^2 + \frac{1}{2}a^2\right)$$

$$= \frac{1}{3a^2} \times \frac{3}{8}a^2$$

$$= \frac{1}{8}$$

また、X の平均を求めると、

$$\int_{-a}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2a} xf(x)dx$$
$$= \int_{-a}^{0} \frac{2}{3a^2}(x^2 + ax)dx + \int_{0}^{2a} \frac{1}{3a^2}(2ax - x^2)dx$$
$$= \frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0}(x^2 + ax)dx + \frac{1}{3a^2}\int_{0}^{2a}(2ax - x^2)dx$$
$$= \frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_{-a}^{0} + \frac{1}{3a^2}\left[ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2a}$$
$$= -\frac{2}{3a^2}\left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3\right) + \frac{1}{3a^2}(4a^3 - \frac{8}{3}a^3)$$
$$= -\frac{2}{3a^2} \times \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3a^2} \times \frac{4}{3}a^3$$
$$= -\frac{1}{9}a + \frac{4}{9}a$$
$$= \frac{3}{9}a$$
$$= \frac{1}{3}a$$

さらに、$Y = 2X + 7$ と置くと、Y の平均は、

$$2 \times \frac{1}{3}a + 7 = \frac{2a}{3} + 7$$

である。