2018年センター数学IIB解答解説Version1

@aporia_life

2018年1月14日作成

第1問 [1] (1) 1ラジアンとは半径1の円で、弧の長さが1であるときの中心角の大きさをいいます。(答えは ②)
なお、⓪ については、中心角の大きさは2ラジアンになります。

① については、中心角の大きさは $\dfrac{2}{\pi^2}$ になります。

③ については、中心角の大きさは $\dfrac{1}{\pi}$ になります。

(2) 144° を弧度法で表すと、

$$\frac{144^\circ}{180^\circ}\pi$$
$$= \frac{4}{5}\pi \cdots \text{(答) ④、⑤}$$

また、$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度数法で表すと、

$$\frac{23}{12} \times 180^\circ$$
$$= \frac{23}{2} \times 30^\circ$$
$$= \frac{690^\circ}{2}$$
$$= 345^\circ \cdots \text{(答) ③、④、⑤}$$

(3) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \cdots ①$$

を満たす θ の値を求める。$x = \theta + \dfrac{\pi}{5}$ とおくと、① は、

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \cdots \text{(答) ⑥}$$

と表せる。加法定理を用いると、

$$2\sin x - 2\left\{\cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right\} = 1$$

$$2\sin x - 2\left\{\cos x \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \frac{1}{2}\right\} = 1$$

$$2\sin x - \left\{\sqrt{3}\cos x + \sin x\right\} = 1$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \cdots \text{(答) ③}$$

三角関数の合成を用いると、

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdots \text{(答) ③、②}$$

と変形できる。

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ より、

$$\theta + \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

$$\theta + \frac{6}{30}\pi = \frac{15}{30}\pi, \frac{35}{30}\pi$$

$$\theta = \frac{9}{30}\pi, \frac{29}{30}\pi$$

$$\theta = \frac{3}{10}\pi, \frac{29}{30}\pi$$

$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より、

$\theta = \frac{29}{30}\pi \cdots$ (答) 2、9、3、0

[2] c を正の定数として、不等式

$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \cdots$ ②

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数をとると、

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)(\log_3 x) \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t = \log_3 x$ とおくと、

$$t^2 \geqq 3(t - \log_3 c)$$

$t^2 - 3t + 3\log_3 c \geqq 0 \cdots 3 \cdots$ (答) 2、3

となる。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、a を底といい、b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき、③ を満たす x の範囲を求める。

③ より、

$$t^2 - 3t + 3\log_3 \sqrt[3]{9} \geqq 0$$

$$t^2 - 3t + 3 \cdot \frac{2}{3} \geqq 0$$

$$t^2 - 3t + 2 \geqq 0$$

$$(t-1)(t-2) \geqq 0$$

$t \leqq 1, 2 \leqq t$ すなわち、 $t \leqq 1, t \geqq 2 \cdots$ (答) 1、2

$t = \log_3 x$ であるから、

$$x \leqq 3^1, 3^2 \leqq x$$

$$x \leqq 3, 9 \leqq x$$

ここで、真数条件より $x > 0$ なので、

$0 < x \leqq 3, 9 \leqq x \cdots$ (答) 0、3、9

次に、② が $x > 0$ の範囲でつねに成り立つような c の範囲を求める。

x が $x > 0$ の範囲を動くとき、t のとり得る値の範囲は実数全体となる。よって、答えは 2 となります。

この範囲の t に対して、③ がつねに成り立つための必要十分条件を考える。

$$t^2 - 3t \geqq -3\log_3 c$$

左辺を平方完成すると、

$$t^2 - 3t$$
$$= t^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$
$$= \left(t - \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{4}$$

よって、頂点の y 座標は $-\dfrac{9}{4}$
グラフは下に凸なグラフだから、頂点の y 座標が $-3\log_3 c$ 以上であればよいので、

$$-\frac{9}{4} \geqq -3\log_3 c$$

$$3\log_3 c \geqq \frac{9}{4}$$

$$\log_3 c \geqq \frac{3}{4} \cdots \text{(答)} \ ③、④$$

$$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}$$

$$c \geqq \sqrt[4]{3^3}$$

$$c \geqq \sqrt[4]{27} \cdots \text{(答)} \ ④、②、⑦$$

第 2 問

[1] $p > 0$ とする。座標平面上の放物線 $y = px^2 + qx + r$ を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。C は点 $A(1, 1)$ において l と接しているとする。
(1) q と r を、p を用いて表す。
放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは、2 である。 $\cdots$ (答) ②

一方、$y = px^2 + qx + r$ を微分すると $y' = 2px + q$ であるから、傾きは $2p + q$ と表されるので、

$$2p + q = 2$$

$$q = -2p + 2 \cdots \text{(答)} \ -、②、②$$

となる。さらに、C は点 A を通ることから、

$$p + q + r = 1$$

$$r = -p - q + 1$$

$$r = -p - (-2p + 2) + 1$$

$$r = -p + 2p - 2 + 1$$

$$r = p - 1 \cdots \text{(答)} \ ①$$

(2) $v > 1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の面積 S とする。
C について、

$$y = px^2 + qx + r$$

$$= px^2 + (-2p + 2)x + (p - 1)$$

$$= p(x^2 - 2x + 1) + 2x - 1$$

$$= p(x - 1)^2 + 2x - 1$$

すると、

$$S = \int_1^v \left[\left\{p(x-1)^2 + 2x - 1\right\} - (2x - 1)\right] dx$$

$$= \int_1^v p(x-1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{p}{3}(x-1)^3\right]_1^v$$

$$= \frac{p}{3}(v-1)^3$$

$$= \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) \cdots$$ (答) ③、③、③、①

また、x 軸と l および 2 直線 $x = 1, x = v$ で囲まれた図形の面積 T とする。

$$T = \int_1^v (2x-1)dx$$

$$= \left[x^2 - x\right]_1^v$$

$$= v^2 - v - 1 + 1$$

$$= v^2 - v \cdots$$ (答) ②

$U = S - T$ は $v = 2$ で極値をとるとする。

$$U = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - (v^2 - v)$$

$$U = \frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - v^2 + v$$

$$U' = \frac{p}{3}(3v^2 - 6v + 3) - 2v + 1$$

$v = 2$ で極値をとるとき、$U' = 0$ となるから、

$$\frac{p}{3}(3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3) - 2 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$\frac{p}{3}(12 - 12 + 3) - 4 + 1 = 0$$

$$\frac{p}{3} \cdot 3 - 3 = 0$$

$$p - 3 = 0$$

$$p = 3 \cdots$$ (答) ③

さらに、$v > 1$ において $U = 0$ となる v の値を v_0 とする。

$U = 0$ を解くと、

$$\frac{p}{3}(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - (v^2 - v) = 0$$

$$(v^3 - 3v^2 + 3v - 1) - (v^2 - v) = 0$$

$$(v-1)^3 - v(v-1) = 0$$

$$(v-1)\{(v-1)^2 - v\} = 0$$

$$(v-1)(v^2 - 2v + 1 - v) = 0$$

$$(v-1)(v^2 - 3v + 1) = 0$$

$$v = 1, \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$v = 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$v > 1$ より、求める $v = v_0$ は、

$$v_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdots$$ (答) ③、⑤、②

$1 < v < v_0$ の範囲において、

$$U = (v-1)^3 - v^2 + v$$

$$U' = 3(v-1)^2 - 2v + 1$$

$$U' = 3v^2 - 6v + 3 - 2v + 1$$

$$U' = 3v^2 - 8v + 4$$

$$U' = (3v-2)(v-2)$$

$U' = 0$ を解くと、

$$v = \frac{2}{3}, 2$$

さらに、$v = 1$ および $v = v_0$ のとき $U = 0$ であるから、
$1 < v \leqq 2$ において 0 より負の値へ減少し、$2 \leqq v < v_0$ にかけて負の値を取りながら 0 へ向かって増加していく。
つまり、負の値のみをとるので、答えは ③ です。
$p = 3$ のとき、$v = 1$ における U の最小値は $v = 2$ の極値のときであるから、$v = 2$ を代入すると、

$$U = (2-1)^3 - 2^2 + 2$$

$$= 1 - 4 + 2$$

$$= -1 \cdots \text{(答)}$$ ⊖、①

[2] 関数 $f(x)$ は $x \geqq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leqq 0$ を満たすとする。$t > 1$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$、$x = t$ で囲まれた図形の面積を W とする。t が $t > 1$ の範囲を動くとき、W は底辺の長さが $2t^2 - 2$、他の 2 辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積と常に等しいとする。このとき、$x > 1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。
一般に、

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つ。$\cdots$ (答) ⑦

また、

$$W = \int_1^t (0 - f(x))dx = [-F(x)]_1^t = F(1) - F(t)$$

が成り立つ。$\cdots$ (答) ④

W の値について考える。
底辺が $2t^2 - 2$、他の辺が $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積を考える。
三平方の定理より、高さを h とすると、

$$h = \sqrt{(t^2+1)^2 - (t^2-1)^2}$$

$$= \sqrt{(t^4 + 2t^2 + 1) - (t^4 - 2t^2 + 1)}$$

$$= \sqrt{4t^2}$$

$$= 2t \quad (\because t > 1)$$

したがって、$t > 1$ において、

$$W = (2t^2 - 2) \cdot 2t \cdot \frac{1}{2}$$

$$= (t^2 - 1)2t$$

$$= 2t^3 - 2t$$

$$\therefore F(1) - F(t) = 2t^3 - 2t$$

なお、$F(1) = 0$ であるから、

$$-F(t) = 2t^3 - 2t$$

$$F(t) = -2t^3 + 2t$$

両辺微分して、

$$f(t) = -6t^2 + 2 \cdots \text{(答)}$$ -、6、2、2

第 3 問

第 4 項が 30、初項から第 8 項までの和が 288 である等差数列を $\{a_n\}$ とし、$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また、第 2 項が 36、初項から第 3 項までの和が 156 である等比数列で公比が 1 より大きいものを $\{b_n\}$ とし、$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。

(1) $\{a_n\}$ について、公差を d とすると、第 4 項が 30 であるから、

$$a_1 + 3d = 30 \cdots ①$$

一方、初項から第 8 項までの和が 288 であるから、

$$8a_1 + 28d = 288 \cdots ②$$

よって、② $-8\times$ ① より、

$$4d = 48$$

$$\therefore d = 12$$

$$\therefore a_1 = -6$$

よって、初項は -6、公差は 12 である。 $\cdots$ (答) -、6、1、2

すると、

$$a_n = -6 + 12(n-1) = 12n - 18$$

よって、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2} \\ &= \frac{\{-6 + (12n-18)\}\times n}{2} \\ &= \frac{(12n-24)n}{2} \\ &= (6n-12)n \\ &= 6n^2 - 12n \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$ 6、1、2

(2) $\{b_n\}$ について、公比を r とすると、

第 2 項が 36 であるから、

$$b_1 r = 36 \cdots ③$$

一方、初項から第 3 項までの和が 156 であるから、

$$b_1(1 + r + r^2) = 156 \cdots ④$$

ここで、③ について、公比は 1 より大きいから、$r > 1$ なので、

$$b_1 = \frac{36}{r}$$

これを ④ に代入すると、

$$\frac{36}{r}(1 + r + r^2) = 156$$

両辺 r 倍すると、

$$36(1 + r + r^2) = 156r$$

$$36(1 + r + r^2) = 156r$$

$$9(1 + r + r^2) = 39r$$

$$3(1+r+r^2)=13r$$

$$3+3r+3r^2=13r$$

$$3r^2-10r+3=0$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & -10 \end{array}$$

$$(r-3)(3r-1)=0$$

$$r=3,\frac{1}{3}$$

いま、$r>1$ より、$r=3$

よって、

$$b_1=\frac{36}{3}=12$$

ゆえに、

初項は 12、公比は 3 $\cdots$ (答) ①、②、③

すると、$b_n=12\cdot 3^{n-1}$ なので、

$$T_n=12\cdot\frac{3^n-1}{3-1}$$
$$=12\frac{3^n-1}{2}$$
$$=6(3^n-1)\ \cdots\ \text{(答) ⑥、③、①}$$

(3) 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$
$$=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

例えば、

$$c_1=a_1-b_1$$

$$c_2=2(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$$

$$c_3=3(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$$

である。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよう。
$\{c_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とする。

$$d_n=c_{n+1}-c_n$$
$$=(a_1-b_1)+\cdots+(a_{n+1}-b_{n+1})$$
$$=(a_1+\cdots+a_{n+1})-(b_1+\cdots+b_{n+1})$$
$$=S_{n+1}-T_{n+1}$$

を満たす。 $\cdots$ (答) ⑤

したがって、(1) と (2) により、

$$S_{n+1}=6(n+1)^2-12(n+1)$$
$$=6n^2+12n+6-12n-12$$
$$=6n^2-6$$
$$=6(n^2-1)$$

$$T_{n+1}=6(3^{n+1}-1)$$

よって、

$$d_n = S_{n+1} - T_{n+1}$$
$$= 6(n^2-1) - 6(3^{n+1}-1)$$
$$= 6(n^2 - 3^{n+1})$$
$$= 6n^2 - 2\cdot 3^{n+2} \cdots \text{(答)}\ ⑥、③、②$$

$a_1 = -6$、$b_1 = 12$ より、

$$c_1 = a_1 - b_1 = -6 - 12 = -18 \cdots \text{(答)}\ ⊖、①、⑧$$

よって、$\{c_n\}$ の一般項について、

$$c_n - c_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1} - c_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} d_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}(6k^2 - 2\cdot 3^{k+2})$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}(6k^2 - 54\cdot 3^{k-1})$$
$$= 6\cdot\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2n-2+1) - 54\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$$
$$= (n-1)n(2n-1) - 27(3^{n-1}-1)$$
$$= n(2n^2-3n+1) - 3^{n+2} + 27$$
$$= 2n^3 - 3n^2 + n - 3^{n+2} + 27$$
$$c_n = 2n^3 - 3n^2 + n - 3^{n+2} + 27 - 18$$
$$= 2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2} \cdots \text{(答)}\ ②、③、⑨、②$$

第 4 問

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とする。三角形 ABC を考え、辺 AB を $1:3$ に内分する点を D、辺 BC を $a:(1-a)$ に内分する点を E、直線 AE と直線 CD の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \overrightarrow{\mathrm{p}}$、$\overrightarrow{\mathrm{FB}} = \overrightarrow{\mathrm{q}}$、$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = \overrightarrow{\mathrm{r}}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FB}} - \overrightarrow{\mathrm{FA}}$

$$= \overrightarrow{\mathrm{q}} - \overrightarrow{\mathrm{p}} \cdots \text{(答)}\ ②$$

であり、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{q}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{p}} + |\overrightarrow{\mathrm{p}}|^2$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{p}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{p}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{q}} + |\overrightarrow{\mathrm{q}}|^2 \cdots ① \cdots \text{(答)}\ ②$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ について、AD を $1:3$ に内分しているので、

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{FB}}$$
$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{p}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{q}} \cdots ② \cdots \text{(答)}\ ③、④、①、④$$

(3) s, t をそれぞれ、$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = s\overrightarrow{\mathrm{r}}$、$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = t\overrightarrow{\mathrm{p}}$ となる実数とする。

s, t を a を用いて表すことを考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = s\overrightarrow{\mathrm{r}}$$

であるから、② より、

$$\frac{3}{4}\vec{\mathrm{p}}+\frac{1}{4}\vec{\mathrm{q}}=s\vec{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \frac{1}{4}\vec{\mathrm{q}}=-\frac{3}{4}\vec{\mathrm{p}}+s\vec{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \vec{\mathrm{q}}=-3\vec{\mathrm{p}}+4s\vec{\mathrm{r}}\cdots③\cdots$$ (答) ⊖、③、④

また、$\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ について考える。

BC を $a:(1-a)$ に内分しているので、

$$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{FB}}+a\overrightarrow{\mathrm{FC}}$$

$$=(1-a)\vec{\mathrm{q}}+a\vec{\mathrm{r}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{\mathrm{p}}$ であるから、

$$(1-a)\vec{\mathrm{q}}+a\vec{\mathrm{r}}=t\vec{\mathrm{p}}$$

$$(1-a)\vec{\mathrm{q}}=t\vec{\mathrm{p}}-a\vec{\mathrm{r}}$$

$$\vec{\mathrm{q}}=\frac{t}{1-a}\vec{\mathrm{p}}-\frac{a}{1-a}\vec{\mathrm{r}}\cdots④\cdots$$ (答) ①、ⓐ、ⓐ

③ と ④ より、

$$\begin{cases}-3=\dfrac{t}{1-a}\\ 4s=-\dfrac{a}{1-a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3(1-a)=t\\ s=-\dfrac{a}{4(1-a)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=-3(1-a)\\ s=\dfrac{-a}{4(1-a)}\end{cases}\quad\cdots$$ (答) ⊖、ⓐ、④、⊖、③

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ とする。$|\vec{\mathrm{p}}|=1$ のとき、$\vec{\mathrm{p}}$ と $\vec{\mathrm{q}}$ の内積を a を用いて表そう。

① により、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1-2\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2$$

また、

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\vec{\mathrm{p}}-\vec{\mathrm{q}}$$

なので、

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=t^2|\vec{\mathrm{p}}|^2-2t\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2$$

$$=\{-3(1-a)\}^2\cdot 1^2-2\{-3(1-a)\}\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2$$

$$=9(1-a)+6(1-a)\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2\cdots$$ (答) ⑨、⑥

したがって、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$$

より、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$$

であるので、

$$1-2\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2=9(1-a)+6(1-a)\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}+|\vec{\mathrm{q}}|^2$$

$$\{6(1-a)+2\}\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}=1-9(1-a)^2$$

$$(8-6a)\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{q}}=-9a^2+18a-8$$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{p}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{q}} = \dfrac{-9a^2+18a-8}{8-6a}$

$= \dfrac{9a^2-18a+8}{6a-8}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{9a^2-18a+8}{3a-4}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{3a(3a-4)-6a+8}{3a-4}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{3a(3a-4)-2(3a-4)}{3a-4}$

$= \dfrac{1}{2}(3a-2)$

$= \dfrac{3a-2}{2} \cdots$ (答) ③、ⓐ、②、②

第 5 問

(1) a を正の整数とする。$2, 4, 6, \cdots, 2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき、そこに書かれた数字を表す確率変数を X とする。すると、$X = 2a$ となるときの確率を考えると、全部で $2 \times 1, 2 \times 2, \cdots, 2 \times a$ の a 枚のカードがあり、そこから 1 枚のカードを取り出すので、確率は $\dfrac{1}{a}$ である。 $\cdots$ (答) ①、ⓐ

以下、X の平均値を $E(X)$、分散を $V(X)$ と表すことにする。

$a = 5$ とする。
$2, 4, 6, 8, 10$ の 5 枚のカードがあるので、
X の平均値 $E(X)$ は

$$E(X) = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6 \cdots \text{(答) ⑥}$$

X	2	4	6	8	10	平均 6
偏差	-4	2	0	2	4	
偏差^2	16	4	0	4	16	8

よって、X の分散 $V(X)$ は $8 \cdots$ (答) ⑧

また、s, t は定数で $s > 0$ のとき、$sX + t$ を考えると、この平均値は $E(sX+t) = sE(X) + t$ と表され、また、分散は $V(sX+t) = s^2V(X)$ と表される。
いま、$sX + t$ の平均が 20、分散が 32 であるから、

$$\begin{cases} sE(X) + t = 20 \\ s^2V(X) = 32 \end{cases}$$

ここに、$E(X) = 6$、$V(X) = 8$ を代入すると、

$$\begin{cases} 6s + t = 20 \\ 8s^2 = 32 \end{cases}$$

これを解くと、$s > 0$ より、

$s = 2$、$t = 8 \cdots$ (答) ②、⑧

このとき、$sX + t$ が 20 以上である確率について、平均が 20 であるから、$sX + t = 20$ 以外は 20 より上と下とで半々ずつあるので、

$\dfrac{3}{5} = 0.6$ である。 $\cdots$ (答) ⑥

(2) (1) の箱のカードの枚数 a は 3 以上とする。この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し、それらのカードを横一列に並べる。この試行において、カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。

すると、

(小, 中, 大)、(小, 大, 中)、(中, 小, 大)、(中, 大, 小)、(大, 小, 中)、(大, 中, 小)

の 6 通りの並べ方があり、この中で、左から小さい順に並んでいるものは (小, 中, 大) であるから、この確率は、

$\frac{1}{6} \cdots$ (答) ①、⑥

この試行を 180 回繰り返すとき、事象 A が起こる回数を表す確率変数を Y とすると、
これは二項分布 $B(n, p)$ に従うので、
Y の平均 m は

$m = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30 \cdots$ (答) ③、⓪

Y の分散 σ^2 は

$\sigma^2 = npq = 180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 25 \cdots$ (答) ②、⑤

ここで、事象 A が 18 回以上 36 回以下で起こる確率の近似値を次のように求めた。

試行回数 180 は大きいことから、Y は近似的に平均 30、標準偏差 $\sigma = \sqrt{25} = 5$ の正規分布に従うと考えられる。
ここで、$Z = \frac{Y - m}{\sigma}$ とおくと、求める確率の近似値は次のようになる。

$P(18 \leqq Y \leqq 36)$
$= P\left(\frac{18-30}{5} \leqq Z \leqq \frac{36-30}{5}\right)$
$= P\left(\frac{-12}{5} \leqq Z \leqq \frac{6}{5}\right)$
$= P\left(\frac{-24}{10} \leqq Z \leqq \frac{12}{10}\right)$
$= P(-2.40 \leqq Z \leqq 1.20) \cdots$ (答) ②、④、⓪、①、②、⓪
$= 0.3849 + 0.4918$
$= 0.8767$
$= 0.88 \cdots$ (答) ⑧、⑧

(3) ある都市での世論調査において、無作為に 400 人の有権者を選び、ある政策に対する賛否を調べたところ、320 人が賛成であった。この年の有権者全体の内、この政策の賛成者の母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めたい。
この調査での賛成者の比率 (以下これを標本比率という) について、

$\frac{320}{400} = \frac{80}{100} = 0.8 \cdots$ (答) ⑧

標本の大きさが 400 と大きいので、二項分布の正規分布による近似を用いると、p に対する信頼度 95% の信頼区間について、

$0.8 - 1.96\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} \leqq p \leqq 0.8 + 1.96\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}}$

$0.8 - 1.96\sqrt{\frac{4}{10000}} \leqq p \leqq 0.8 + 1.96\sqrt{\frac{4}{10000}}$

$0.8 - 1.96 \cdot \frac{2}{100} \leqq p \leqq 0.8 + 1.96 \cdot \frac{2}{100}$

$0.8 - 0.0392 \leqq p \leqq 0.8 + 0.0392$

$0.7608 \leqq p \leqq 0.8392$

$0.76 \leqq p \leqq 0.84 \cdots$ (答) ⑦、⑥、⑧、④

よって、信頼区間の幅 L_1 は、

$L_1 = 0.84 - 0.76 = 0.08$

標本の大きさが 400 の場合に標本比率 $R=0.6$ が得られたときについて、

$$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{400}} \leqq p \leqq 0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{400}}$$

$$0.6-1.96\sqrt{\frac{6}{10000}} \leqq p \leqq 0.6+1.96\sqrt{\frac{6}{10000}}$$

$$0.6-1.96\cdot\frac{2.4}{100} \leqq p \leqq 0.6+1.96\cdot\frac{2.4}{100}$$

$$0.6-0.047 \leqq p \leqq 0.6+0.047$$

$$0.553 \leqq p \leqq 0.647$$

$$0.55 \leqq p \leqq 0.65$$

よって、信頼区間の幅 L_2 は、

$$L_2 = 0.65-0.55 = 0.10$$

標本の大きさが 500 の場合に標本比率 $R=0.8$ が得られたときについて、

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{500}} \leqq p \leqq 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{500}}$$

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{3.2}{10000}} \leqq p \leqq 0.8+1.96\sqrt{\frac{3.2}{10000}}$$

$$0.8-1.96\cdot\frac{1.7}{100} \leqq p \leqq 0.8+1.96\cdot\frac{1.7}{100}$$

$$0.8-0.033 \leqq p \leqq 0.8+0.033$$

$$0.767 \leqq p \leqq 0.833$$

$$0.77 \leqq p \leqq 0.83$$

よって、信頼区間の幅 L_3 は、

$$L_3 = 0.83-0.77 = 0.06$$

よって、

$$L_3 < L_1 < L_2 \cdots \text{(答) ④}$$